4.3 线性空间的定义

[ ] ↗→ + 加法

Recall、矩阵、向量.

$\mathbb{F}$ [1,2,3 ⋯] · 数乘

Def 1、设 $\mathbb{P}$ 是一个数域，V 是一个非空集合．对 V 中任意两个元素 α，β．有唯一的 V 中的元素与之对应．记作 α 与 β 的和．

↳ 在 V 中定义了加法 "+"

又对 $\mathbb{P}$ 中任一数 k 与 V 中任一元素 α，有唯一的 V 中元素与它们对应．叫作 k 与 α 的积．记作 $k\alpha$．

↳ 在 V 中定义了~~乘积~~ 数量积（纯量积）．

且这两种运算满足下列八条性质．

- 加法部分：

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha \quad \forall \alpha,\beta\in V. \text{（交换）}$$

$$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma) \quad \text{（结合）}$$

$$\forall \alpha,\beta,\gamma\in V$$

$$\exists\, 0\in V, \text{ s.t. } 0+\alpha=\alpha \quad \forall \alpha\in V \text{（零元）}$$

$$\forall \alpha\in V,\ \exists -\alpha\in V, \text{ s.t. } \alpha+(-\alpha)=0. \text{（负元）}$$

- 乘法部分．

$$1\cdot\alpha=\alpha \quad \forall \alpha\in V \quad \text{（单位元）}$$

$$k(l\alpha)=(kl)\alpha \quad \forall k,l\in\mathbb{P},\alpha\in V \quad \text{（结合律）}$$

- 加法与数乘．

$$(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha \quad \forall k,l\in\mathbb{P},\ \alpha\in V.$$

$$k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta \quad \forall k\in\mathbb{P},\ \alpha,\beta\in V.$$

Note

1. 加法、乘法只不过是一个二元函数．

$f(x,y)=x+y$

$(x,y)\mapsto x+y$.

则称 V 是数域 $\mathbb{P}$ 上的线性空间（向量空间）. V 中元素称为向量，$\mathbb{P}$ 为 V 的基域.

下面是线性空间更为常用之性质.

1° ~~满足~~ 零元是唯一的.

证：设若有 $0' \in V$, s.t. $0'+\alpha=\alpha \quad \forall \alpha \in V$.

取 $\alpha=0$，即 $0'=0+0'=0'+0=0$

故称 0 为 V 的零元素或零向量.

2° 对于 $\alpha \in V$，满足条件 4° (负元) 的元素是唯一的.

称 $-\alpha$ 为 α 的负元素或负向量.

证：若 $\beta \in V$，使取 α 使 $\alpha+\beta=0$，则

$$\beta=0+\beta=((\alpha)+(-\alpha))+\beta=(-\alpha)+(\alpha+\beta)=-\alpha.$$

3° 消去律：若 $\alpha, \beta, \gamma \in V$，$\alpha+\beta=\alpha+\gamma$，则 $\beta=\gamma$.

证：$\beta=0+\beta=-\alpha+\alpha+\beta=-\alpha+\alpha+\gamma=\gamma$.

4° $\forall k \in \mathbb{P}$，$k\cdot 0=0$；$\forall \alpha \in V$，$0\cdot\alpha=0$，$(-1)\cdot\alpha=-\alpha$

证：$0+k\cdot 0=\underline{k\cdot 0}=k\cdot(0+0)=\underline{k\cdot 0+k\cdot 0}$.

$\Rightarrow k\cdot 0=0$

$0+0\cdot\alpha=0\cdot\alpha=(0+0)\alpha=0\cdot\alpha+0\cdot\alpha$.

$\Rightarrow 0\cdot\alpha=0$

由 $0\cdot\alpha=0$ 知 $\quad \alpha+(-1)\alpha=(1+(-1))\alpha=0$

$=\alpha+(-\alpha)$.

$\Rightarrow (-1)\alpha=-\alpha$.

5° $k \in \mathbb{P}$，$\alpha \in V$，且 $k\alpha=0$，则 $k=0$ 或 $\alpha=0$.

证：~~采用反证法~~ 若 $k \neq 0$.

$$\alpha=\left(\frac{1}{k}\cdot k\right)\alpha=\frac{1}{k}(k\alpha)=\frac{1}{k}0=0$$

另一方面易同法证得.

Eg、行向量空间与列向量空间.

$\begin{array}{cc} & m \\ n & \left[\begin{matrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{matrix}\right] \end{array}$ 对加法与数乘封闭.

• 行向量空间 $1\left[\underbrace{\quad\cdots\quad}_{n}\right]$

• 列向量空间 $\begin{array}{cc} & 1 \\ m & \left[\begin{matrix} \quad \\ \quad \end{matrix}\right] \end{array}$

Eg、P上的一元多项式集合 $P[x]$ 对多项式加法、多项式与数的乘法构成P上的线性空间

多项式 v.s. 多项式函数

x

形式符号

Eg、设V是所有收敛实数数列之集合，

即 $V=\left\{\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots): \lim\limits_{n\to\infty} a_n \text{存在}\right\}$

则对数列的加法，数列与实数乘法，V构成R上的线性空间.

~~为了方便起见~~，

定义了一个定义后 $\longrightarrow$

① 初等的性质？

② 与它关联的结构？

③ 结构与~~空间~~结构间有何联系？ $\begin{cases}\text{同类} \\ \text{不同类}\end{cases}$

设 W 为数域P上的线性空间的子集，若对 $\forall \alpha,\beta\in W$，有 $\alpha+\beta\in W$，称 W对加法封闭.

如果 $\forall k\in P$，$\alpha\in W$，有 $k\alpha\in W$，称 W对纯量乘法封闭.

Def 2 设 W 是数域 $\mathbb{P}$ 上线性空间 V 的非空子集，如果对于 V 的加法、纯量乘法 W 也构成一个线性空间，则称 W 是 V 的线性子空间. 简称子空间.

一些初步的性质.

i. 若 W 是 v.s. V 的非空子集，下面3个命题等价.

- W 是 V 的子空间
- W 对 V 的加法、数乘封闭.
- $\forall k, l \in \mathbb{P}$, $\alpha, \beta \in W$, $k\alpha + l\beta \in W$.

证：(1) ⇒ (2) W 是 V 的子空间 ⇒ 线性空间 ⇒ ∃ 加法、数乘与V中一致.

↪ W 对 V 的两种运算都封闭.

(2) ⇒ (1) W 对 V 的两种运算都封闭. 由 $W \neq \emptyset$，有 $\alpha \in W$，于是 $-\alpha = (-1)\alpha$，　$0 = \alpha - \alpha \in W$.

W 是 $\mathbb{P}$ 上的线性空间，是 V 的子空间 → 零元、逆元.

(1) ⇒ (3) By defn.

(3) ⇒ (1). 取 $k = l = 1$，$l = 0$. 封闭.

注：W 中的两种运算与 V 中的一致.

Eg、在 $\mathbb{R}^{1\times 3}$ 的子集 $W_1 = \{(x, y, 1) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ 对 $\mathbb{R}^{1\times 3}$ 的两种运算都不封闭.

倘若在 W_1 中定义加法 $+'$：

$$(x, y, 1) +' (x_1, y_1, 1) := (x + x_1, y + y_1, 1)$$

纯量乘法 $*$：$k*(x, y, 1) := (kx, ky, 1)$.

此时：W_1 是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间，此时并不是 $\mathbb{R}^{1\times 3}$ 的子空间

平凡子空间：设V是P上的线性空间，则V与{0}都是V的子空间，叫做平凡子空间

唯一元素有限之子空间.

找到那与"基" $\Rightarrow$ 生成空间.

Eg. 设V是P上线性空间，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s \in V$，则V的子集

$$L(\alpha_1, \cdots, \alpha_s) := \left\{ \sum_{i=1}^{s} k_i \alpha_i \;\middle|\; k_i \in P \right\}$$

是V的子空间，称为由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 生成的子空间.

说明：
$$\sum_{i=1}^{s} k_i \alpha_i + \sum_{i=1}^{s} l_i \alpha_i = \sum_{i=1}^{s} (k_i + l_i) \alpha_i$$
$$k\left(\sum_{i=1}^{s} k_i \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^{s} (k k_i) \alpha_i .$$

• $\sum_{i=1}^{s} k_i \alpha_i$ 称作 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 的一个<u>线性组合</u>.

Th3. 设 W_1, W_2 为P上线空V的两个子空间，则 W_1 与 W_2 的交：$W_1 \cap W_2$ 以及 W_1 与 W_2 的和：$W_1 + W_2 := \{\alpha_1 + \alpha_2 \mid \alpha_1 \in W_1, \alpha_2 \in W_2\}$. 是V的子空间.

Prf. idea： 交：取两公共集合的那些元素.

$0 \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$.

不妨用 $\alpha, \beta \in W_1, W_2$. $k, l \in P$.

$$\left.\begin{array}{l} k\alpha + l\beta \in W_1 \\ k\alpha + l\beta \in W_2 \end{array}\right\} \Rightarrow k\alpha + l\beta \in W_1 \cap W_2$$

$\Rightarrow$ 是子空间.

和：$k(\alpha_1 + \alpha_2) + l(\beta_1 + \beta_2) = (\underset{\underset{W_1}{\cap}}{k\alpha_1 + l\beta_1}) + (\underset{\underset{W_2}{\cap}}{k\alpha_2 + l\beta_2}) \in W_1 + W_2$.

对子空间作线性组合