4.4 线性相关、线性无关.

Recall. 向量的组成

Def 1. 设 V 是 $\mathbb{P}$ 上的线性空间，V 中向量组 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$ 称为 <u>线性相关</u>

$\Leftrightarrow$ 有不全为 0 的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s \in \mathbb{P}$, s.t.

$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots k_s\alpha_s = 0$.

否则，称为<u>线性无关</u>.

[注] 1° 否定上述 (线性无关) $\Leftrightarrow$ $\xrightarrow{} Q$

$$\left(\neg\left(\exists \text{ 不全为0的数 } k_1 \cdots k_s \in \mathbb{P}.\ k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s = 0\right)\right)$$

$$Q \equiv \forall\left(\text{不全为0的数 } k_1 \cdots k_s \in \mathbb{P},\right).\left(\neg\left(k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s = 0\right)\right).$$

$$\equiv \forall\left(\text{不全为0的数 } k_1 \cdots k_s \in \mathbb{P}\right).\left(k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s \neq 0\right).$$

即 若 $k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$，必有 $k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$ (逆否).

2° $\{\alpha_1 \cdots \alpha_s\}$ 可换为无限向量组. A、若其中一个有限子集是线性相关的.

称 A 线性无关，任意有限子集是线性无关的.

下面考虑初步的性质.

1° 一个元素 α 线性无关 $\Leftrightarrow$ $\alpha \neq 0$.

2° $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ $(s \geq 2)$ 线性相关

$\Leftrightarrow$ ~~有一个~~ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 中有一个 α_{i_0} 是其他向量之<u>线性组合</u>.

证：若 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 线性相关，有不全为 0 实数，$k_1 \cdots k_s$，

With loss of generality $\rightarrow$ $\boxed{\text{wlog}}$ 设 $k_s \neq 0$. 使

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s = 0.$$

$$\alpha_s = \frac{-k_1}{k_s}\alpha_1 + \cdots + \frac{-k_{s-1}}{k_s}\alpha_{s-1}$$

由此可被 $\alpha_1 \cdots \alpha_{s-1}$ 的线性组合表出.

3° 向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性无关 $\Leftrightarrow$

它的任何部分组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_t}$ 也是线性无关的.

证: $\Leftarrow$ 令 $t=s$.

$\Rightarrow$ 反证法.

$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots \alpha_{i_t}$ 线性相关.

$\exists$ 不全为0的 $k_{i_1}, k_{i_2}, \cdots, k_{i_t} \in P$. s.t. $\sum_{j=1}^{t} k_{i_j} \alpha_{i_j} = 0$.

那么取 $k_l = \begin{cases} 0, & l \neq i_1, \cdots, i_t \\ k_{i_j}, & l = i_j, \quad 1 \leq j \leq t. \end{cases}$

则 $k_1, \cdots, k_s$ 不全为0. 而 $\sum_{l=1}^{s} k_l \alpha_l = 0$, $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 线相

$\Rightarrow\Leftarrow$!

多一个α

4° 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关, 而 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \alpha$ 线性相关

则 α 可由 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 在不计 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 的次序下唯一表出.

证: (存在性) $\boxed{\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \alpha \text{ 线性相关}} \Rightarrow \boxed{\exists \text{不全为0 } k_1, \cdots, k_s \in P, \text{ s.t. } \left(\sum_{i=1}^{s} k_i \alpha_i\right) + k\alpha = 0}$

· 若 $k=0$, 则 $\sum_{i=1}^{s} k_i \alpha_i = 0$, $k_1, \cdots, k_s$ 不全为0.

与 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 线性无关矛盾.

因此 $k \neq 0$. $\alpha = \sum_{i=1}^{s} \frac{-k_i}{k} \alpha_i$. 因而可被 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 线性表出.

(唯一性) 又若有 $\alpha = \sum_{i=1}^{s} l_i \alpha_i$, 则

做差

$$\sum_{i=1}^{s} \left(-\frac{k_i}{k} - l_i\right) \alpha_i = 0.$$

由 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 线性无关知: $l_i = -\frac{k_i}{k}$, $i=1, \cdots, s$.

即 α 被 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性表出方式唯一.

5° 若向量 α 可被 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性表出，且表示法唯一，

则 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性无关.

设 α 被 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 线性表出方式为

$$\alpha = k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s .$$

反证. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关，则有不全为 0 的 $l_1, \cdots, l_s$

s.t. $$0 = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_s\alpha_s .$$

用而 α 可被 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 用另一方式：

$$\alpha = (k_1+l_1)\alpha_1 + \cdots + (k_s+l_s)\alpha_s$$ 表出.

$\Rightarrow\Leftarrow$!

故 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 线性无关.