§5.1 线性变换的定义和例子.

Def 1. 设 V 是数域 P 的线性空间，$\mathscr{A}$ 是 V 的一个变换（即 $\mathscr{A}: V \to V$），

满足

· $\mathscr{A}(\alpha+\beta) = \mathscr{A}\alpha + \mathscr{A}\beta$，$\forall \alpha, \beta \in V$ （保持加法）

· $\mathscr{A}(k\alpha) = k\mathscr{A}\alpha$，$\forall k \in P, \alpha \in V$. （保持数乘）

则称 $\mathscr{A}$ 是 V 的一个线性变换.

Eg 1. 设 $A \in P^{n\times n}$，定义 $P^{n\times 1}$ 的变换 $\mathscr{A}$ 为

$$\mathscr{A}(\alpha) = A\alpha,\ \forall \alpha \in P^{n\times 1}.$$

$\mathscr{A}$ 是 $P^{n\times 1}$ 的一个线性变换. （~~多项式的~~基变换）.

Eg 2. 在 $P^{n\times n}$ 中取一元素 A，定义 $P^{n\times n}$ 中变换 $\mathrm{ad}\,A$ 如下：

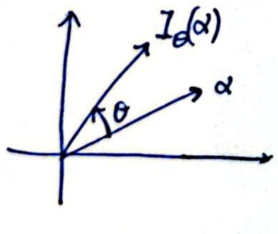
$$\mathrm{ad}\,A(B) = AB - BA,\ \forall B \in P^{n\times n}.$$

因为
$$\begin{aligned}\mathrm{ad}\,A(B+C) &= A(B+C) - (B+C)A \\ &= (AB-BA) + (AC-CA) = \mathrm{ad}\,A(B) + \mathrm{ad}\,A(C).\end{aligned}$$

$$\mathrm{ad}\,A(kB) = A(kB) - (kB)A = k(AB-BA) = k\,\mathrm{ad}\,A(B).$$

那 $\mathrm{ad}\,A$ 是 $P^{n\times n}$ 的线性变换.

Eg 3. （旋转变换） 设 $|\alpha| = r$，幅角为 φ. $\alpha = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$.



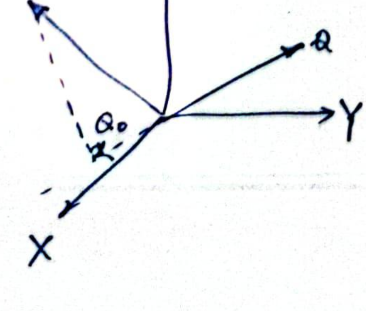
$I_\theta(r)$ 的长度为 r，幅角为 $\theta+\varphi$.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

由此 I_θ 是一个线性变换.

Eg 4. 取空间直角坐标系 $OXYZ$，~~设~~选定 $\overrightarrow{OP} = \alpha \neq 0$. $\beta = \overrightarrow{OQ}$，过 Q 作 OP 的垂线，垂足为 Q_0，称 $\overrightarrow{OQ_0}$ 为 β 在 α 上的投影.

定义变换 Π_α 为将 β 映射到"β 在 α 上的投影"



设 $\alpha, \beta, \Pi_\alpha\beta$ 坐标为 $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

且满足 $\Pi_\alpha\beta = \lambda\alpha$，$|\lambda\alpha|^2 + |\overrightarrow{QQ_0}|^2 = |\overrightarrow{OQ}|^2$.

待定

$\overrightarrow{QQ_0} = \begin{pmatrix} \lambda x_0 - x \\ \lambda y_0 - y \\ \lambda z_0 - z \end{pmatrix}$.

由此 $(\lambda x_0)^2+(\lambda y_0)^2+(\lambda z_0)^2+(\lambda x_0-x)^2+(\lambda y_0-y)^2+(\lambda z_0-z)^2$

$= x^2+y^2+z^2$

$\Rightarrow \lambda = (xx_0+yy_0+zz_0)/(x_0^2+y_0^2+z_0^2)$

所以 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{x_0^2+y_0^2+z_0^2} \begin{pmatrix} x_0^2 & x_0y_0 & x_0z_0 \\ x_0y_0 & y_0^2 & y_0z_0 \\ x_0z_0 & y_0z_0 & z_0^2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Eg 5. $\frac{d}{dx}$ 是 $C^{\infty}(a,b)$ 的线性变换.

Eg 6. $S(f(x)) := \int_a^x f(t)\,dt$, $\forall f(x)\in C[a,b]$. 是 $C[a,b]$ 上的线性变换.

Def 2. 其他常见的变换

$0(\alpha)=0$, $\forall \alpha\in V$.

$id(\alpha)=\alpha$, $\forall \alpha\in V$.

$k(\alpha)=k\alpha$, $\forall \alpha\in V$.