§5.2 线性变换的运算

设 V 是 P 上的线性空间，$\mathrm{End}\,V$ 为 V 中所有线性变换的集合.

1、加法： 设 $\mathscr{A},\mathscr{B}\in\mathrm{End}\,V$，定义 A 与 B 的和为

$$(\mathscr{A}+\mathscr{B})\alpha := \mathscr{A}\alpha+\mathscr{B}\alpha \quad ,\ \forall\alpha\in V.$$

(定义之合理性：若 $\alpha,\beta\in V$，$k\in P$，

$$\begin{aligned}(\mathscr{A}+\mathscr{B})(\alpha+\beta) &= \mathscr{A}(\alpha+\beta)+\mathscr{B}(\alpha+\beta) = \cdots \\ &= (\mathscr{A}+\mathscr{B})\alpha+(\mathscr{A}+\mathscr{B})\beta.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathscr{A}+\mathscr{B})(k\alpha) &= \mathscr{A}(k\alpha)+\mathscr{B}(k\alpha) = \cdots \\ &= k(\mathscr{A}+\mathscr{B})\alpha \Rightarrow \mathscr{A}+\mathscr{B}\in\mathrm{End}\,V)\end{aligned}$$

2、纯量（数乘） 设 $k\in P$，$\mathscr{A}\in\mathrm{End}\,V$，则定义 k 与 $\mathscr{A}$ 之积为

$$(k\mathscr{A})\alpha := k\cdot\mathscr{A}\alpha \quad ,\ \forall\alpha\in V.$$

同理可证 $k\mathscr{A}\in\mathrm{End}\,V$.

3. 乘法 设 $\mathscr{A},\mathscr{B}\in\mathrm{End}\,V$，则 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 的积为

$$(\mathscr{A}\mathscr{B})\alpha := \underbrace{\mathscr{A}(\underbrace{\mathscr{B}(\alpha)}_{\text{作用}\mathscr{B}})}_{\text{作用}\mathscr{A}} \quad ,\ \forall\alpha\in V.$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathscr{B}"] \arrow[dr, "\mathscr{A}\mathscr{B}"'] & V \arrow[d, "\mathscr{A}"] \\ & V \end{tikzcd}$$

(定义之合理性： $(\mathscr{A}\mathscr{B})(k\alpha+l\beta) = \mathscr{A}(\mathscr{B}(k\alpha+l\beta))$

$$\begin{aligned}&= \mathscr{A}(k\mathscr{B}\alpha+l\mathscr{B}\beta) = k\mathscr{A}(\mathscr{B}(\alpha))+l\mathscr{A}(\mathscr{B}(\beta)) \\ &= k(\mathscr{A}\mathscr{B})\alpha+l(\mathscr{A}\mathscr{B})\beta.\end{aligned}$$

因此 $\mathscr{A}\mathscr{B}\in\mathrm{End}\,V$.

).

Th1. 设 V 是 $\mathbb{P}$ 上的线性空间，V 的所有线性变换为 $\mathrm{End}\,V$，则

- $\mathrm{End}\,V$ 对加法及数乘构成 $\mathbb{P}$ 上的线性空间
- $\mathrm{End}\,V$ 中乘法满足结合律 $\mathscr{A}(\mathscr{B}\mathscr{C})=(\mathscr{A}\mathscr{B})\mathscr{C} \in \mathrm{End}\,V$.

  ◀ 对 $\forall\alpha$，$\mathscr{A}(\mathscr{B}(\mathscr{C}(\alpha))) \overset{\text{Def}}{=\!=} (\mathscr{A}\mathscr{B})(\mathscr{C}(\alpha))$. ▶

  且 $\mathrm{id}\,\mathscr{A}=\mathscr{A}\,\mathrm{id}=\mathscr{A}$ ◀ by def ▶，$0\mathscr{A}=\mathscr{A}0=0$ ◀ by def ▶，

- $\mathrm{End}\,V$ 中加法与乘法适合分配律.

$$\mathscr{A}(\mathscr{B}+\mathscr{C})=\mathscr{A}\mathscr{B}+\mathscr{A}\mathscr{C} \ ; \ (\mathscr{B}+\mathscr{C})\mathscr{A}=\mathscr{B}\mathscr{A}+\mathscr{C}\mathscr{A}.$$

  ◀ 对 $\forall\alpha$ 作用即可 ▶

- $\mathrm{End}\,V$ 中乘法与数乘满足 $k(\mathscr{A}\mathscr{B})=(k\mathscr{A})\mathscr{B}=\mathscr{A}(k\mathscr{B})$，$\forall k\in\mathbb{P}$，$\mathscr{A},\mathscr{B}\in \mathrm{End}\,V$.

证明见定理中.

Def 1. 若 V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 为一一对应，称 $\mathscr{A}$ 为可逆线性变换. 否则称不可逆.

Def 2. V 是 $\mathbb{P}$ 上线性空间. $GL(V)$ 是 V 的所有可逆线性变换集合.

Th 2. 继续 Def 2，

- $\mathrm{id}\in GL(V)$
- $\mathscr{A}\in GL(V)$，则 $\mathscr{A}^{-1}\in GL(V)$，且 $(\mathscr{A}^{-1})^{-1}=\mathscr{A}$.
- $\mathscr{A},\mathscr{B}\in GL(V)$，则 $\mathscr{A}\mathscr{B}\in GL(V)$，$(\mathscr{A}\mathscr{B})^{-1}=\mathscr{B}^{-1}\mathscr{A}^{-1}$.

Prf. 这是 $V\to V$ 同构映射.

Def 3. V 是 $\mathbb{P}$ 上线性空间，又 $\mathscr{A}\in \mathrm{End}\,V$，定义

$$\mathscr{A}^0=\mathrm{id}, \qquad \mathscr{A}^{n+1}=\mathscr{A}\mathscr{A}^n.$$

$\mathscr{A}^n$ 为 $\mathscr{A}$ 的 n 次幂.

若 $f(x)=\sum_{i=0}^{m} a_i x^i \in \mathbb{P}[x]$，定义

$$f(\mathscr{A})=a_0\,\mathrm{id}+a_1\mathscr{A}+\cdots+a_m\mathscr{A}^m$$

为 $\mathscr{A}$ 的一个多项式.

Th3. 设 $\mathscr{A}$ 是 $\mathbb{P}$ 上线性空间 V 的线性变换，定义 $\mathbb{P}[x]$ 到 $\operatorname{End} V$ 的映射 φ_A 为

$$\varphi_A(f(x)) = f(\mathscr{A}) \ , \forall f(x) \in \mathbb{P}[x].$$

那么 • φ_A 是线性空间 $\mathbb{P}[x]$ 到 $\operatorname{End} V$ 的线性映射.

• φ_A 保持乘法. 即 $\varphi_A(f(x)g(x)) = \varphi_A(f(x))\,\varphi_A(g(x))$.

• $\operatorname{Ker} \varphi_A = \{ f(x) \mid f(\mathscr{A})=0 \}$ 是 $\mathbb{P}[x]$ 的子空间. 且若 $f(x) \in \operatorname{Ker} \varphi_A$，则 $f(x)g(x) \in \operatorname{Ker} \varphi_A$. $\forall g(x) \in \mathbb{P}[x]$.

Prf. (1) 用 $f(x), g(x)$. (2) → (3). 略.

推论 1. $m, n \in \mathbb{Z}$，$m \geq 0$，$n \geq 0$. 则

$$(\mathscr{A}^n)^m = \mathscr{A}^{nm}.$$

推论 2. 若 $\operatorname{Ker} \mathscr{A} \neq \{0\}$，以 $d_{\mathscr{A}}(x)$ 表示 $\operatorname{Ker} \varphi_{\mathscr{A}}$ 中次数最低的首一多项式，称 $\mathscr{A}$ 的 $\boxed{\text{最低多项式}}$. 则 $f(x) \in \operatorname{Ker} \varphi_A \Leftrightarrow d_{\mathscr{A}}(x) \mid f(x)$.

即 $\operatorname{Ker} \varphi_A = \{ d_{\mathscr{A}}(x)\, g(x) \mid g(x) \in \mathbb{P}[x] \}$.

Prf. 以 $q(x)$，$r(x)$ 表 $f(x)$ 除以 $d_{\mathscr{A}}(x)$ 之商、余式. 由

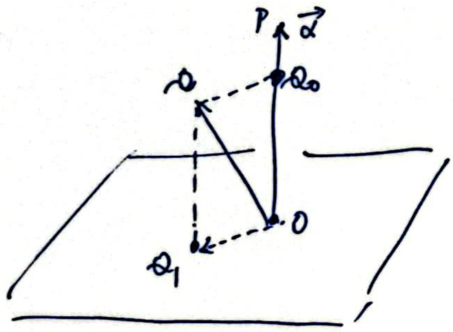
$$f(\mathscr{A}) = d_{\mathscr{A}}(\mathscr{A})\, q(\mathscr{A}) + r(\mathscr{A}) = r(\mathscr{A}).$$

知 $f(x) \in \operatorname{Ker} \varphi_{\mathscr{A}} \Leftrightarrow r(x) \in \operatorname{Ker} \varphi_{\mathscr{A}}$. 但若 $d_{\mathscr{A}}(x)$ 为 $\operatorname{Ker} \varphi_{\mathscr{A}}$ 中次数最低者，若 $r(x) \neq 0$，由 $\deg r(x) < \deg d_{\mathscr{A}}(x)$，矛盾.

故 $r(x) = 0$.

最低多项式的一些例子.

Eg 7. 设 α 为空间一非零向量，在直角坐标系 $OXYZ$ 中，$\overrightarrow{OP}=\vec{\alpha}$，过 O 做平面 π 与 α 垂直，又 $\beta=\overrightarrow{OQ}$，$\beta$ 在 α 上的投影为 $\Pi_\alpha\beta=\overrightarrow{OQ_0}$，过 Q 作 π 的垂线，垂足为 Q_1. $\overrightarrow{OQ_1}$ 为 β 在 π 上的投影. 记作 $\Pi_{\alpha'}$



由 $id,\ \Pi_\alpha\in \mathrm{End}\,V$，$id-\Pi_\alpha\in\mathrm{End}\,V$，

但 $(id-\Pi_\alpha)\beta = id\beta-\Pi_\alpha\beta=\Pi_{\alpha'}\beta$.

故 $\Pi_{\alpha'}=id-\Pi_\alpha\in\mathrm{End}\,V$，且显然

$\Pi_\alpha^2=\Pi_\alpha$，$\Pi_{\alpha'}^2=\Pi_{\alpha'}$ $\{0,id\}$.

因而 $x^2-x\in\mathrm{Ker}\,\varphi_{\Pi_\alpha}$，$x^2-x\in\mathrm{Ker}\,\varphi_{\Pi_{\alpha'}}$，

由 $\Pi_{\alpha'}\neq 0$，$\Pi_\alpha\neq id$，$\Pi_{\alpha'}\neq 0$，$\Pi_{\alpha'}\neq id$.

从而 $d_{\Pi_\alpha}(x)=d_{\Pi_{\alpha'}}(x)=x^2-x$.

Eg 8. $d_{id}(x)=x-1$ ，因为 $id-id=0$.

Eg 9. $d_0(x)=x$. ，因为 $0=0$.

Eg 10. 设 $\mathscr{D}=\frac{d}{dx}\in\mathrm{End}\,P[x]_n$，则 $\mathscr{D}(f(x))=0$，$\forall f(x)\in\mathbb{P}[x]_n$.

$\forall k<n$，$\mathscr{D}^k(x^{n-1})\neq 0$.

因而 $d_{\mathscr{D}}(x)=x^n$.

Eg 11. 设 $a\in\mathbb{P}$，定义 $S_a\in\mathrm{End}\,\mathbb{P}[x]_n$ 为 （平移算子）

$$S_a(f(x))=f(x+a)\ ,\ \forall f(x)\in\mathbb{P}[x]_n.$$

由于 $f(x+a)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a^k}{k!}\frac{d^kf(x)}{dx^k}$ （Taylor展开）.

$$S_a=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{a^i}{i!}\mathscr{D}^i .$$

Eg 12. $\mathscr{D}=\frac{d}{dx}$ 最低多项式不存在，因而 $\mathrm{Ker}\,\varphi_{\mathscr{D}}=\{0\}$.

• 若 $\dim V<\infty$，$\forall \mathscr{A}\in\mathrm{End}\,V$ 最低多项式一定存在.