简单朴素集合论

对应《问题求解》
简单朴素集合论的一些定义; 高级集合操作
悖论的出现


examples


借题发挥

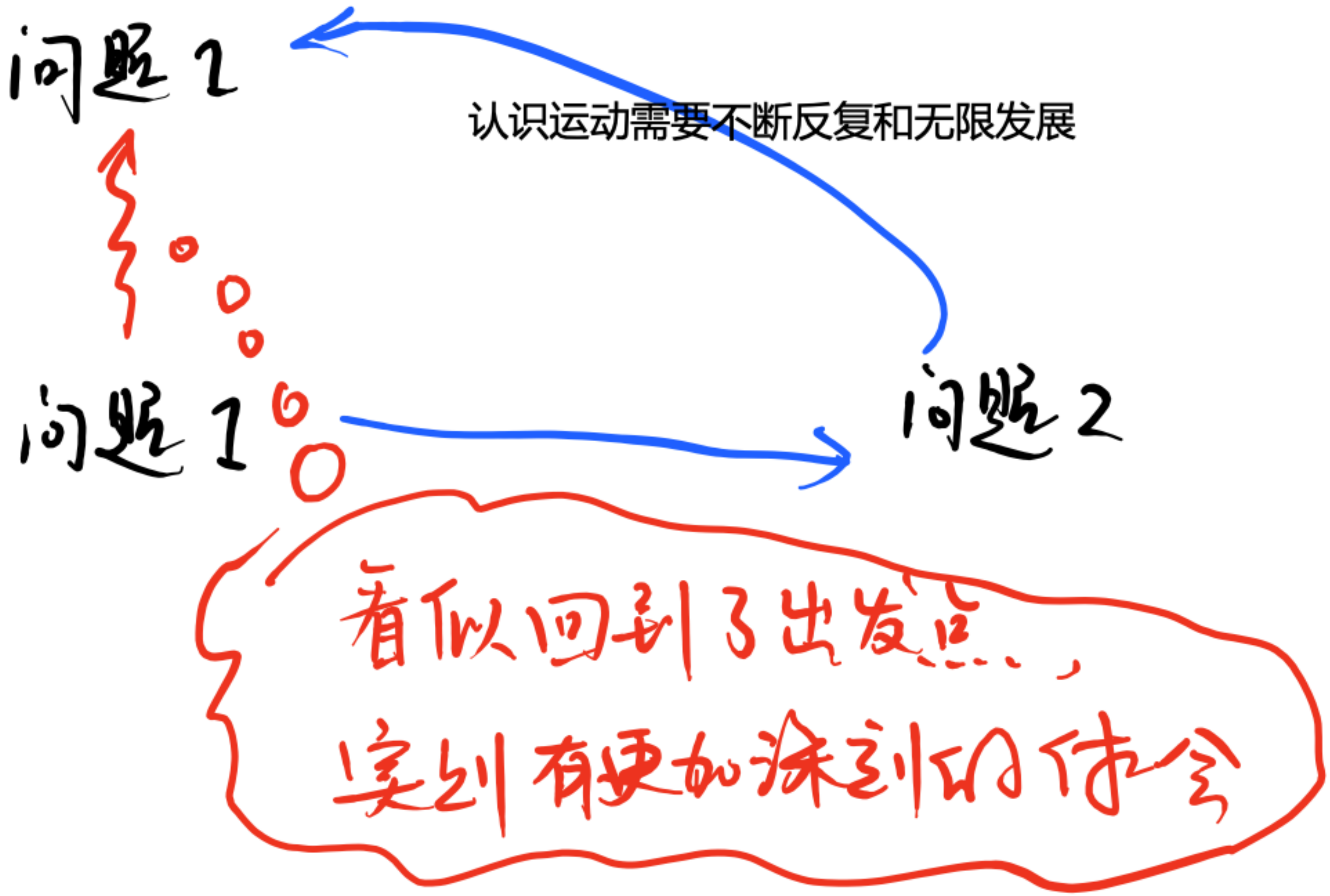

Learning by
Doing

为什么要重新学习集合论

- 有点像我们曾经探讨过的 “数理逻辑”一样

- 由感性的认识到理性的认识
  - 感性认识
    - Def. 感觉器官获得关于是我外在联系和表面特征. 事物的外部联系和表面特征的认识形式.
    - 地位: 认识的初级阶段
    - 形式: 感觉, 知觉, 表象
      - 感觉: 客观事物作用于人的感官引起的最简单的反映形式
      - 知觉: 对事物的表面现象和外部连续的综合反映
      - 表象: 在知觉的基础上形成感性的形象
    - 特性: 直接, 生动, 具体
    - 范畴: 表面的, 外部的
  - 理性认识
    - Def. 人们在感性认识的基础上, 通过头脑的思维活动得到的关于事物本质和规律的认识
    - 地位: 是认识的高级阶段
    - 表现:
      - 概念
      - 判断: 对事物所有肯定或者否定的思维形式
      - 推理: 根据事物之间的联系, 由已有的判断推出新判断的思维形式
    - 特性: 间接性, 概括性, 抽象
    - 范畴: 内部的, 本质的
  - 关系: 感性认识和理性认识相互依赖, 相互渗透
    - 理性认识源于感性认识, 感性认识有待于发展到理性认识
    - 感性 $\longrightarrow$ 理性:价值观影响着感知活动的方面; 主题已有的理性认识影响着人类的深度和水平性认识要用理性认识描述
    - 理性 $\longrightarrow$ 感性: 理性认识由感性认识做对象; 理性认识要以感性形式为物质表现
    - 割裂两者关系: 唯理论(教条主义); 经验论(经验主义)

为什么要重新学习集合论



一. 简单朴素集合论

回顾中学生学的集合...

Section 2. 老师会讲给你听的集合故事

2.1 数学的精髓之一在于对事物的抽象

马上就会发现这个东西会有大麻烦...

回想你有没有这样的经历

- 老师: 请班里的男生站起来.
- 数一数(count), 班里一共有多少人. 男生 = 对于一个人, 他的性别是男.

这不是废话?

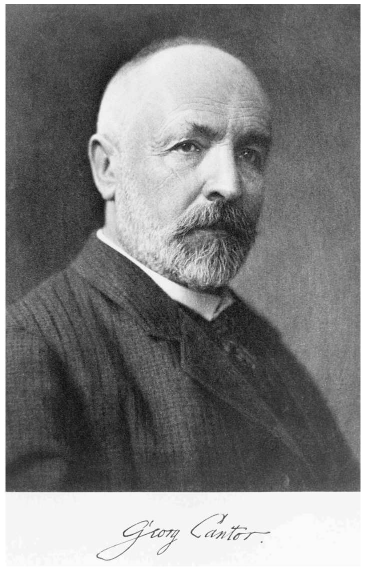
- 我们是不是也可以用一个描述, 来将具有一定属性(attribute)的东西归类在一起呢?
  - 这就是集合(set)的作用了.
- 于是我们想:
  - 集合是"确定的一堆东西"吧... 没有东西应该也算是确定的一堆东西——空.
  - 既然集合的作用是分类, 那么把一件事情重复说几遍也没什么太大意义, 因此, 我们要求集合里面不能有重复的元素.
  - 既然集合的作用是分类, 那么顺序自然感觉也是无关的!
- 都有什么东西可以看作一个集合呢?
  - 任何东西!
  - 一些集合也可以形成集合!
  - 例子: `{{1,2},{1,2,3},{1,2,3,4}}`.

选自*AUG's Wiki* — 高中数学入门 第二讲

一. 集合

1. 定义(by Georg Cantor)

我们将集合理解为任何将我们思想中那些确定而彼此独立的对象放在一起而形成的聚合



2. 对于集合的一些操作原理

集合是怎么出来的:

定理 3.1.1 (概括原则)**.** 对于任意性质/谓词 $P(x)$, 都存在一个集合 X:

$$X = \{x \mid P(x)\}$$

集合的相等如何判断:

定义 3.1.2 (外延性原理 (Extensionality))**.** 两个集合相等 ($A = B$) 当且仅当它们包含相同的元素.

$$\forall A.\ \forall B.\ \Big(\big(\forall x.\ (x \in A \leftrightarrow x \in B)\big) \leftrightarrow A = B\Big)$$

这条公理意味着集合这个对象完全由它的元素决定.

一. 集合

3. 子集

(1) 定义

定义 3.1.3 (子集). 设 A、B 是任意两个集合.

$A \subseteq B$ 表示 A 是 B 的子集 (subset):

$$A \subseteq B \iff \forall x \in A.\, (x \in A \to x \in B)$$

$A \subseteq B$ 表示 A 是 B 的真子集 (proper subset):

$$A \subseteq B \iff A \subseteq B \land A \neq B$$

(2) 一些比较重要的性质

- 互为子集 – 集合相等

定理 3.1.2. 两个集合相等当且仅当它们互为子集.

$$A = B \iff A \subseteq B \land B \subseteq A$$

如何证明?

一. 集合

如果学习过了Coq, 就可以交给电脑来验证:

exp > a.v

```
Require Import Coq.Sets.Ensembles.

Section SetsEqual.

  Variable U : Type.
  Variable A : Ensemble U.
  Variable B : Ensemble U.

  Theorem sets_equal: Included U A B /\ Included U B A -> A = B.
  Proof.
    intros H. apply Extensionality_Ensembles. split; apply H.
  Qed.

End SetsEqual.
```

MAIN 1　SHELVED 0　GIVEN UP 0

```
U : Type
A, B : Ensemble U
____________________
(1/1)
Included U A B /\ Included U B A ->
A = B
```

一. 集合

如果学习过了Coq, 就可以交给电脑来验证:

exp > a.v

```coq
Require Import Coq.Sets.Ensembles.

Section SetsEqual.

  Variable U : Type.
  Variable A : Ensemble U.
  Variable B : Ensemble U.

  Theorem sets_equal: Included U A B /\ Included U B A -> A = B.
  Proof.
    intros H. apply Extensionality_Ensembles. split; apply H.
  Qed.

End SetsEqual.
```

MAIN 1 SHELVED 0 GIVEN UP 0

```
U : Type
A, B : Ensemble U
H : Included U A B /\ Included U B A
────────────────────────────
(1/1)
A = B
```

一. 集合

如果学习过了Coq, 就可以交给电脑来验证:

exp > a.v

```
Require Import Coq.Sets.Ensembles.

Section SetsEqual.

  Variable U : Type.
  Variable A : Ensemble U.
  Variable B : Ensemble U.

  Theorem sets_equal: Included U A B /\ Included U B A -> A = B.
  Proof.
    intros H. apply Extensionality_Ensembles. split; apply H.
  Qed.

End SetsEqual.
```

MAIN 1 SHELVED 0 GIVEN UP 0

```
U : Type
A, B : Ensemble U
H : Included U A B /\ Included U B A
________________________________________
(1/1)
Same_set U A B
```

一. 集合

如果学习过了Coq, 就可以交给电脑来验证:

exp > a.v

```
Require Import Coq.Sets.Ensembles.

Section SetsEqual.

  Variable U : Type.
  Variable A : Ensemble U.
  Variable B : Ensemble U.

  Theorem sets_equal: Included U A B /\ Included U B A -> A = B.
  Proof.
    intros H. apply Extensionality_Ensembles. split; apply H.
  Qed.

End SetsEqual.
```

MAIN 0 SHELVED 0 GIVEN UP 0

Proof finished

一. 集合

3. 子集

(2) 一些比较重要的性质

- 互为子集 – 集合相等

4. 集合的交和并

(1) 定义

定义 3.1.4 (集合的并 (Union)).

$$A \cup B \triangleq \{x \mid x \in A \lor x \in B\}$$

定义 3.1.5 (集合的交 (Intersection)).

$$A \cap B \triangleq \{x \mid x \in A \land x \in B\}$$

一. 集合

4. 集合的交和并

(2) 运算的规律: 分配率

定理 3.1.3 (分配律 (Distributive Law)).

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

证明. 对任意 x,

$$\begin{aligned} & x \in A \cup (B \cap C) \\ \iff & (x \in A) \vee (x \in B \wedge x \in C) \\ \iff & (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \\ \iff & (x \in A \cup B) \wedge (x \in A \cup C) \\ \iff & x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

用我们的逻辑进行重述

$\square$

一. 集合

4. 集合的交和并

(2) 运算的规律: 分配率

定理 3.1.3 (分配律 (Distributive Law)).

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

证明. 对任意 x,

$$\begin{aligned} & x \in A \cup (B \cap C) \\ \Longleftrightarrow\ & (x \in A) \vee (x \in B \wedge x \in C) \\ \Longleftrightarrow\ & (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \\ \Longleftrightarrow\ & (x \in A \cup B) \wedge (x \in A \cup C) \\ \Longleftrightarrow\ & x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

用我们的逻辑进行重述

$\square$

一. 集合

4. 集合的交和并

(2) 运算的规律: 分配率, 吸收率

定理 3.1.4 (吸收律 (Absorption Law)).

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

证明. 对任意 x,

$$\begin{aligned} & x \in A \cup (A \cap B) \\ \Longleftrightarrow\ & x \in A \vee (x \in A \wedge x \in B) \\ \Longleftrightarrow\ & x \in A \end{aligned}$$

一. 集合

4. 集合的交和并

(2) 运算的规律: 分配率, 吸收率

证明: $A \subseteq B \iff A \cup B = B \iff A \cap B = A$

证明. 对任意 x

$$x \in B$$
$$\Longrightarrow x \in A \vee x \in B$$
$$\Longrightarrow x \in A \cup B$$

X

另一半也是一样的.

一. 集合

4. 集合的差和补

(1) 定义

定义 3.1.6 (集合的差 (Set Difference); 相对补 (Relative Complement)).

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

定义 3.1.7 (绝对补 (Absolute Complement); $\overline{A}, A', A^c$). 设全集为 U.

$$\overline{A} = U \setminus A = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

其中, 全集 U (Universe) 是当前正在考虑的所有元素构成的集合. 一般均默认存在. 通常可以注意到: 不存在 “包罗万象” 的全集.

这里就接近悖论了

一. 集合

我们引入这个记号是想让它和命题逻辑里面的
非产生联系

4. 集合的差和补

(1) 性质:

- 反斜杠看起来很难办, 它转化为基本的符号

定理 3.1.6 (“相对补” 与 “绝对补” 之间的关系). 设全集为 U.

$$\boxed{A \setminus B = A \cap \overline{B}}$$

证明. 对任意 x,

$$\begin{aligned}
& x \in A \setminus B \\
\Longleftrightarrow\ & x \in A \land x \notin B \\
\Longleftrightarrow\ & x \in A \land (x \in U \land x \notin B) \\
\Longleftrightarrow\ & x \in A \land x \in \overline{B} \\
\Longleftrightarrow\ & x \in A \cap \overline{B}
\end{aligned}$$

一. 集合

4. 集合的差和补

(1) 性质:

- De Morgan律

定理 3.1.7 (德摩根律 (绝对补)). 设全集为 U.

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

证明. 对任意 x,

$$\begin{aligned}
& x \in \overline{A \cup B} \\
\Longleftrightarrow\ & x \in U \wedge \neg(x \in A \vee x \in B) \\
\Longleftrightarrow\ & x \in U \wedge x \notin A \wedge x \notin B \\
\Longleftrightarrow\ & (x \in U \wedge x \notin A) \wedge (x \in U \wedge x \notin B) \\
\Longleftrightarrow\ & x \in \overline{A} \wedge x \in \overline{B} \\
\Longleftrightarrow\ & x \in \overline{A} \cap \overline{B}
\end{aligned}$$

本质上还是用了命题逻辑里面的内容...

一. 集合

4. 集合的差和补

(1) 性质:

- De Morgan律

定理 3.1.8 (德摩根律 (相对补)).

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$$

$$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$$

证明.

$$\begin{aligned} & C \setminus (A \cup B) \\ \Longleftrightarrow\ & C \cap \overline{A \cup B} \\ \Longleftrightarrow\ & C \cap (\overline{A} \cap \overline{B}) \\ \Longleftrightarrow\ & (C \cap \overline{A}) \cap (C \cap \overline{B}) \\ \Longleftrightarrow\ & (C \setminus A) \cap (C \setminus B) \end{aligned}$$

一. 集合

有了这些之后我们在讨论集合的时候
就不用从集合里面抽取元素加以论证
我们可以在集合整体上进行论证

定理 3.1.8 (德摩根律 (相对补)).

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$$

$$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$$

证明.

$$\begin{aligned} & C \setminus (A \cup B) \\ \Longleftrightarrow\ & C \cap \overline{A \cup B} \\ \Longleftrightarrow\ & C \cap (\overline{A} \cap \overline{B}) \\ \Longleftrightarrow\ & (C \cap \overline{A}) \cap (C \cap \overline{B}) \\ \Longleftrightarrow\ & (C \setminus A) \cap (C \setminus B) \end{aligned}$$

二. 高级的集合操作

一. 集合

1. 定义(by Georg Cantor)
   我们将集合理解为任何将我们思想中那些确定而彼此独立的对象放在一起而形成的聚合

那么集合里面可不可以是集合?

https://en.wikipedia.org › wiki › Matryoshka_doll

[Matryoshka doll - Wikipedia]

Matryoshka dolls also known as stacking dolls, **nesting dolls**, Russian tea dolls, or **Russian dolls**, are a set of wooden dolls of decreasing size placed one ...

二. 高级的集合操作

对于交和并, 对于集合也定义一下吧!

1. 广义并

定义 3.2.1 (广义并 (Arbitrary Union)). 设 $\mathbb{M}$ 是一组集合 (a *collection* of sets)

$$\bigcup \mathbb{M} = \Big\{x \mid \exists A \in \mathbb{M}.\ x \in A\Big\}$$

例子:

$$\mathbb{M} = \Big\{\{1,2\},\{\{1,2\},3\},\{4,5\}\Big\}, \text{那么} \bigcup \mathbb{M} = \Big\{1,2,3,4,5,\{1,2\}\Big\}.$$

只打开一次集合的符号

二. 高级的集合操作

对于交和并, 对于集合也定义一下吧!

2. 广义交

定义 3.2.2 (广义交 (Arbitrary Intersection)). 设 $\mathbb{M}$ 是一组集合 (a *collection* of sets)

$$\bigcap \mathbb{M} = \left\{ x \mid \forall A \in \mathbb{M}.\ x \in A \right\}$$

二. 高级的集合操作

对于交和并, 对于集合也定义一下吧!

2. 广义交

定义 3.2.2 (广义交 (Arbitrary Intersection)). 设 $\mathbb{M}$ 是一组集合 (a *collection* of sets)

$$\bigcap \mathbb{M} = \left\{x \mid \forall A \in \mathbb{M}.\ x \in A\right\}$$

: $\mathbb{M} = \Big\{\{1,2\},\{\{1,2\},3\},\{4,5\}\Big\}$ 是全集, $\bigcap \mathbb{M} = \emptyset$.

灵魂拷问: $\bigcap \emptyset = ?$

任意的A属于M, 可是空集不包含任何元素啊?

找不到这样的集合, 所以所有的一切, 所有的元素都满足要求

二. 高级的集合操作

对于交和并, 对于集合也定义一下吧!

2. 广义交

定义 3.2.2 (广义交 (Arbitrary Intersection)). 设 $\mathbb{M}$ 是一组集合 (a *collection* of sets)

$$\bigcap \mathbb{M} = \left\{ x \mid \forall A \in \mathbb{M}.\ x \in A \right\}$$

: $\mathbb{M} = \left\{ \{1,2\}, \{\{1,2\},3\}, \{4,5\} \right\}$ 是全集, $\bigcap \mathbb{M} = \emptyset$.

灵魂拷问: $\bigcap \emptyset = U$

马上会发现悖论, 因为U不存在...

二. 高级的集合操作

对于交和并, 对于集合也定义一下吧!

3. 广义集合的操作

定理 3.2.1 (德摩根律).

$$X \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (X \setminus A_\alpha)$$

$$X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus A_\alpha)$$

定义 3.1.6 (集合的差 (Set Difference); 相对补 (Relative Complement)).

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

定义 3.1.7 (绝对补 (Absolute Complement); $\overline{A}, A', A^c$). 设全集为 U.

$$\overline{A} = U \setminus A = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

其中, 全集 U (Universe) 是当前正在考虑的所有元素构成的集合. 一般均默认存在. 通常可以注意到: 不存在 "包罗万象" 的全集.

由于交和并都已经定义, 这个定义自然可以顺延过来

二. 高级的集合操作

3. 广义集合的操作

Example 举例:

如果

$$X_n = \{-n, -n+1, \cdots, 0, \cdots, n-1, n\}$$

请化简:

$$A = \mathbb{R} \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{Z}^+} (\mathbb{R} \setminus X_n)$$

二. 高级的集合操作

3. 广义集合的操作

$\mathbb{E}$xample 举例:

如果

$$X_n = \{-n, -n+1, \cdots, 0, \cdots, n-1, n\}$$

请化简:

$$A = \mathbb{R} \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{Z}^+} (\mathbb{R} \setminus X_n)$$

证明. 用一次De Morgan律试试看!

$$\begin{aligned} A &= \mathbb{R} \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{Z}^+} (\mathbb{R} \setminus X_n) \\ &= \mathbb{R} \setminus \left(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} X_n\right) \\ &= \mathbb{R} \setminus \left(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\right) \\ &= \mathbb{Z} \end{aligned}$$

□

三. 幂集

1. 定义

定义 3.2.3 (幂集 (Powerset))**.**

$$\mathcal{P}(A) = \left\{X \mid X \subseteq A\right\}$$

例如

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

三. 幂集

2. 性质

定理 3.2.2.

$$S \in \mathcal{P}(X) \iff S \subseteq X$$

这个定理的作用是在 $\in$ 和 $\subseteq$ 之间转换, 同时脱去一层 $\mathcal{P}()$ 记号.

> Example 举例:
>
> 请证明:
>
> $$\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(S)))$$

证明. 根据上面的定理, 我们有

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(S))) \iff \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(S)).$$

分别证明之:

转化为了我们熟知的包含记号

$\emptyset \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(S))$

$\iff \emptyset \subseteq \mathcal{P}(S)$

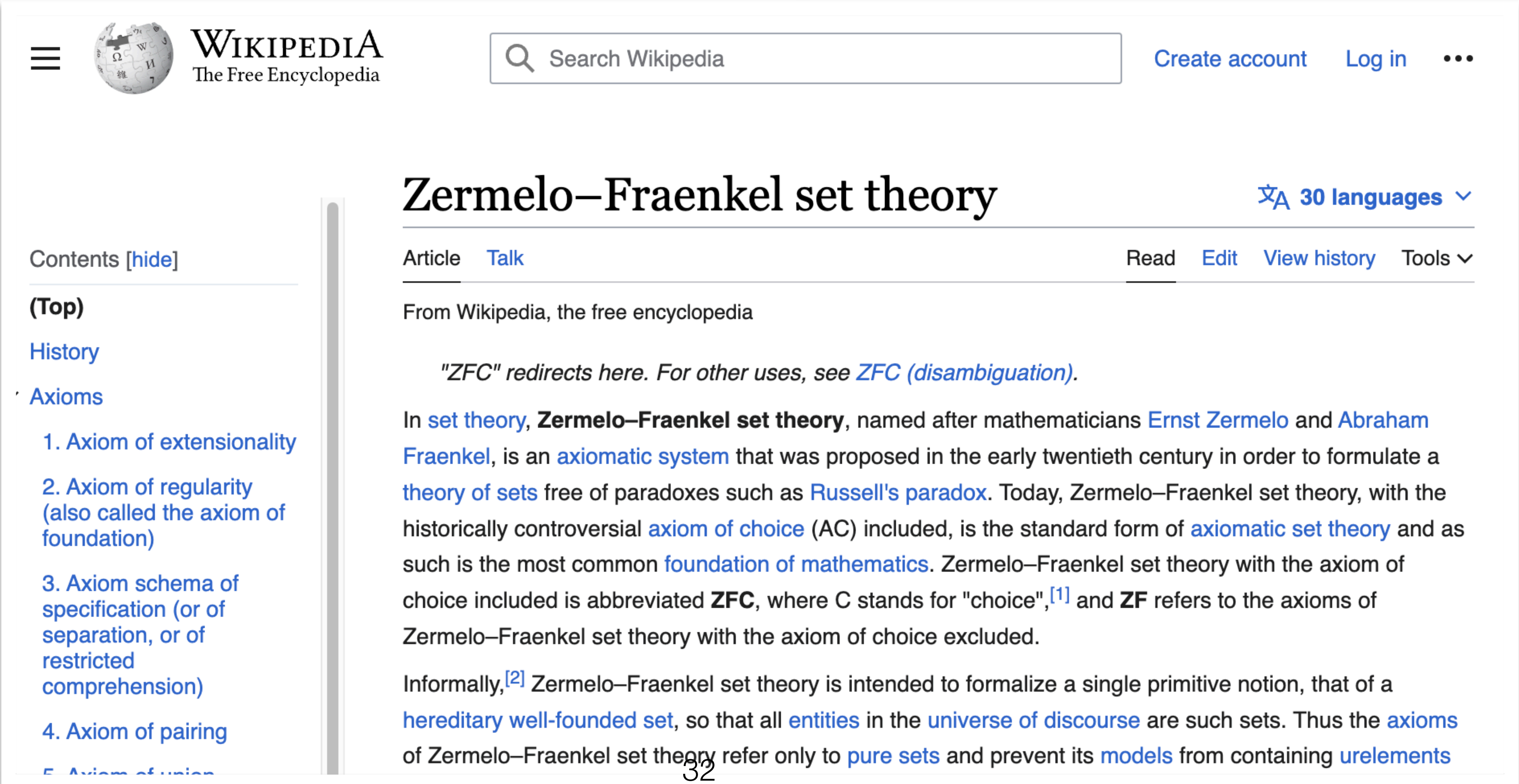
...

四. 悖论的出现

“悖论出现于数学的边界上, 而且是靠近哲学的边界上” — Godel

参考 “理发师悖论”

$$P(x) \triangleq \text{“}x \notin x\text{”}, \text{集合 } R = \{x \mid x \notin x\}.$$



WIKIPEDIA The Free Encyclopedia

Search Wikipedia

Create account Log in

Zermelo–Fraenkel set theory

30 languages

Article Talk Read Edit View history Tools

Contents [hide]

From Wikipedia, the free encyclopedia

"ZFC" redirects here. For other uses, see ZFC (disambiguation).

In set theory, **Zermelo–Fraenkel set theory**, named after mathematicians Ernst Zermelo and Abraham Fraenkel, is an axiomatic system that was proposed in the early twentieth century in order to formulate a theory of sets free of paradoxes such as Russell's paradox. Today, Zermelo–Fraenkel set theory, with the historically controversial axiom of choice (AC) included, is the standard form of axiomatic set theory and as such is the most common foundation of mathematics. Zermelo–Fraenkel set theory with the axiom of choice included is abbreviated **ZFC**, where C stands for "choice",[1] and **ZF** refers to the axioms of Zermelo–Fraenkel set theory with the axiom of choice excluded.

Informally,[2] Zermelo–Fraenkel set theory is intended to formalize a single primitive notion, that of a hereditary well-founded set, so that all entities in the universe of discourse are such sets. Thus the axioms of Zermelo–Fraenkel set theory refer only to pure sets and prevent its models from containing urelements

参考的课件与书本

1. Maths for Computer Science
2. 魏恒峰《离散数学》(2020) 集合论

Thank You!

Your opinon Matters

QQ: 2095728218
Email: micoael@qq.com
(学校) gwzhang@cug.edu.cn