集合论II

二元关系: 介绍与例子(2)

本节与《问题求解》没有对应

是对于上一节的补充与一些直观的定义


examples


借题发挥


Learning by
Doing

图的若干表示方法

Google Relation meaning

Dictionary

Definitions from Oxford Languages · Learn more

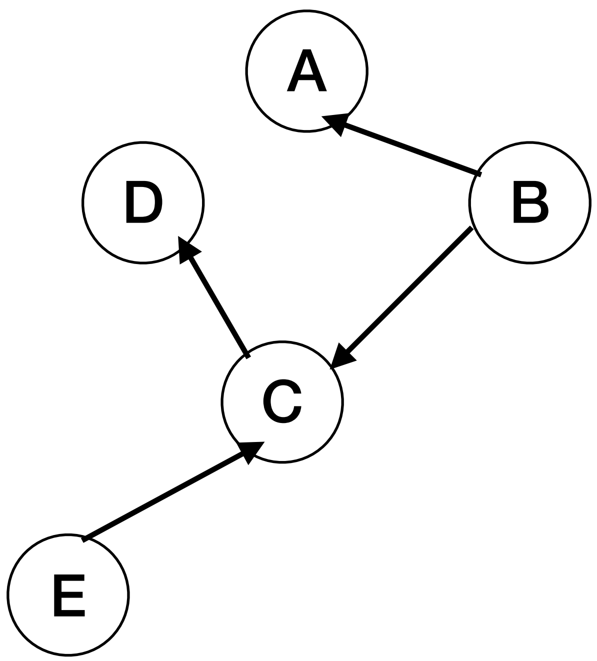
relation

1. the way in which two or more people or things are connected; a thing's effect on or relevance to another.
2. a person who is connected by blood or marriage; a relative.

应该怎样把图塞进内存里?

图的若干表示方法

- 顶多是两个点之间的关系, 所以枚举一下



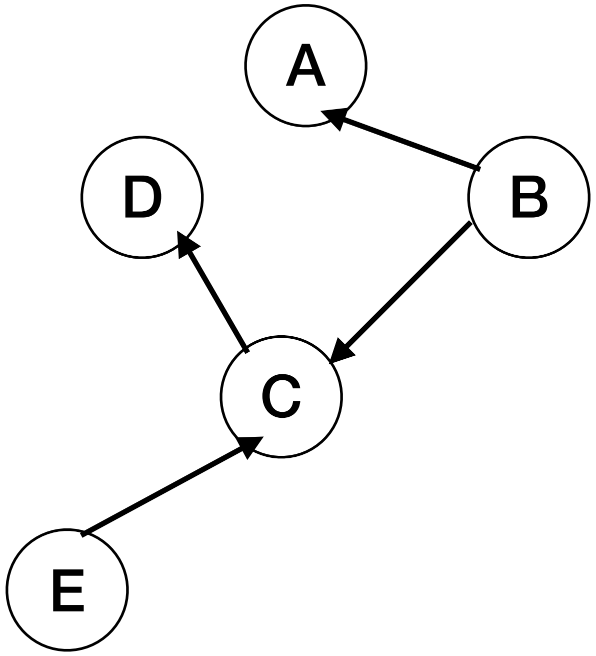
	A	B	C	D	E
A					
B	1		1		
C				1	
D					
E			1		

这个方法是比较实在的

“二元关系” 可以用图表示, 这次主要来看看这个形式的

图的若干表示方法

- 那上一节是干啥的?
- 其实是从集合的视角来看关系



上一节的方法是把所有的边存在了一个集合里面

我们重新扫一遍上节的内容...

一. 用矩阵表示的二元关系

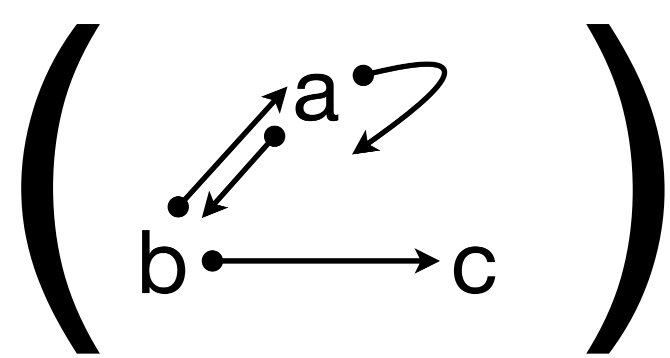
1. 邻接矩阵

Def.设$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}, B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$,
$R \subseteq A \times B$, 邻接矩阵$M(R) = (r_{ij})_{m \times n}$, 其中, 如果$i, j$有关系, 那么就记作1, 否则记作0. 也就是

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & a_i R b_j \\ 0 & a_i \overline{R} b_j \end{cases}$$

如$A = \{a, b, c\}; R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, c)\}$

$$M(R) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$G(R) =$ 

(按照字母顺序排列)

一. 用矩阵表示的二元关系

2. 邻接矩阵的运算

Def.(并) $(a \vee b)_{ij} = \begin{cases} 1 & a_{ij} = 1 \vee b_{ij} = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

Def.(交) $(a \wedge b)_{ij} = \begin{cases} 1 & a_{ij} = 1 \wedge b_{ij} = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

Def.(复合, 积)$(a \circ b)_{ij} = \begin{cases} 1 & \exists k, \text{s.t.} a_{ik} = 1 \wedge b_{jk} = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

一. 用矩阵表示的二元关系

2. 邻接矩阵的运算

Def.(并) $(a \vee b)_{ij} = \begin{cases} 1 & a_{ij} = 1 \vee b_{ij} = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

Def.(交) $(a \wedge b)_{ij} = \begin{cases} 1 & a_{ij} = 1 \wedge b_{ij} = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

Def.(复合, 积)$(a \circ b)_{ij} = \begin{cases} 1 & \exists k, \text{s.t.} a_{ik} = 1 \wedge b_{jk} = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

问题1.

设$A = \{a, b, c\}, R_1 = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,c)\}, R_2 = \{(a,b),(a,c),(b,c)\}$. 求解$R_1 \circ R_2$.

解答.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

二. 关系的运算

(一) 三个定义

好像没什么可以简化的, 用集合论定义是很好的

Recall.

$$\mathrm{dom}(R) = \{a \mid \exists b\,.\,(a,b) \in R\}$$

提示: 和中学的函数类比

“所有有定义的地方 第一个元素的集合”

$$\mathrm{ran}(R) = \{b \mid \exists a\,.\,(a,b) \in R\}$$

“所有有定义的地方 第二个元素的集合”

$$\mathrm{fld}(R) = \mathrm{dom}(R) \cup \mathrm{ran}(R)$$

二. 关系的运算

(二) 五种操作

1. 逆变换(inverse)

Def.The *inverse* of R is the relation

$$R^{-1} = \{(a, b) \mid (b, a) \in R\}$$

逆变换就是把关系矩阵转置.

问题2. 设R, S是任意的关系, 证明$(\mathrm{dom}F)^{-1} = \mathrm{ran}F$

取$\forall x \in (\mathrm{dom}F)^{-1}$, 对于dom$F$的元素, 有 $\exists b\,.\,(x, b) \in R$. 不妨设某个c满足了$(x, c) \in R$. 由于逆的定义, 有$(c, x) \in R^{-1}$. 引入存在量词, 就有了$\exists b\,.\,(b, x) \in R$, 这时候得到的集合的代表元素$x$即为所求.

二. 关系的运算

(二) 五种操作

1. 逆变换(inverse)

Def9.The *inverse* of R is the relation

$$R^{-1} = \{(a,b) \mid (b,a) \in R\}$$

逆变换就是把关系矩阵转置.

问题2. 设R, S是任意的关系, 证明$(\text{dom}F)^{-1} = \text{ran}F$

取$\forall x \in (\text{dom}F)^{-1}$, 对于dom$F$的元素, 有 $\exists b\,.\,(x,b) \in R$. 不妨设某个c满足了$(x,c) \in R$. 由于逆的定义, 有$(c,x) \in R^{-1}$. 引入存在量词, 就有了$\exists b\,.\,(b,x) \in R$, 这时候得到的集合的代表元素$x$即为所求.

二. 关系的运算

(二) 五种操作

2, 3, 4 和矩阵没有啥大关系, 于是跳过...

二. 关系的运算

(二) 五种操作

5. 复合(inverse): 就类似矩阵的乘法.

Th. 满足结合律$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$

Proof. 对任意(a, b)

$$
\begin{aligned}
& (a, b) \in (R \circ S) \circ T \\
\Longleftrightarrow\ & \exists c\,.\ \big((a, c) \in T \wedge (c, b) \in R \circ S\big) \\
\Longleftrightarrow\ & \exists c\,.\ \big((a, c) \in T \wedge (\exists d\,.\ (c, d) \in S \wedge (d, b) \in R)\big) \\
\Longleftrightarrow\ & \exists d\,.\ \exists c\,.\ \big((a, c) \in T \wedge (c, d) \in S \wedge (d, b) \in R\big) \\
\Longleftrightarrow\ & \exists d\,.\ \big((\exists c\,.\ (a, c) \in T \wedge (c, d) \in S) \wedge (d, b) \in R\big) \\
\Longleftrightarrow\ & \exists d\,.\ \big((a, d) \in S \circ T \wedge (d, b) \in R\big) \\
\Longleftrightarrow\ & (a, b) \in R \circ (S \circ T)
\end{aligned}
$$

二. 关系的运算

(三) 七种性质

1. 自反的:

Def. $R \subseteq X \times X$ is reflexive if

$$\forall a \in X\,.\,(a,a) \in R$$

等价于:

- $M(R)$对角线上的元素全是1
- R^{-1}是自反的
- $G(R)$的每个顶点都有环

二. 关系的运算

(三) 七种性质

2. 反自反的(Irreflexive):

Def. $R \subseteq X \times X$ is irreflexive if

$$\forall a \in X \,.\, (a, a) \notin R$$

等价于:

- $M(R)$对角线上的元素全是0
- R^{-1}是反自反的
- $G(R)$的每个顶点都无环

二. 关系的运算

(三) 七种性质

3. 对称(symmetric)

Def. $R \subseteq X \times X$ is irreflexive if

$$\forall a, b \in X \, . \, aRb \rightarrow bRa$$

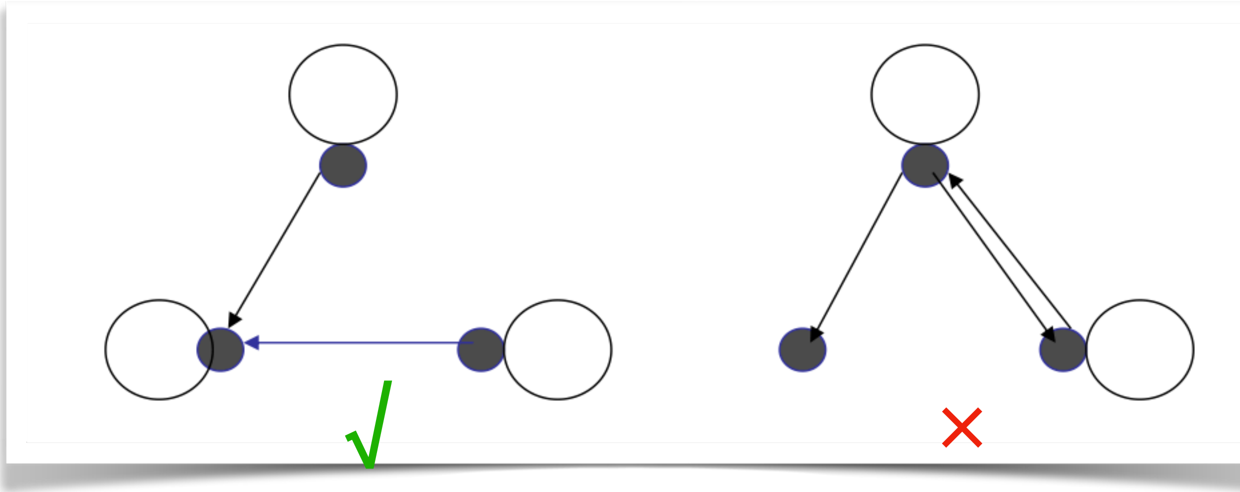
等价于:

- 关系矩阵是对称矩阵($A^T = A$)
- $R^{-1} = R$
- $G(R)$的任何两个节点之间如果有边, 必然有双向边

二. 关系的运算

(三) 七种性质

4. 反对称(antisymmetric)



Def. $R \subseteq X \times X$ is antisymmetric if

$$\forall a, b \in X\,.\,((aRb \wedge bRa) \rightarrow a = b)$$

等价于:

- R^{-1}是反对称的
- 在$M(R)$中, $\forall i\,.\forall j\,.(i \neq j \wedge r_{ij} = 1 \rightarrow r_{ji} = 0)$
- $G(R)$的任何两个节点之间如果有边, 只能有单向边

二. 关系的运算

(三) 七种性质

5. 传递性

Def. $R \subseteq X \times X$ is transitive if

$$\forall a, b, c \in X \,.\, (aRb \land bRc \to aRc)$$

等价于:

- $R \circ R \subseteq R$ (封闭性)
- R^{-1}是传递的
- 在$M(R \circ R)$矩阵r'_{ij}中, $\forall i \,.\, \forall j \,.\, (r'_{ij} = 1 \to r_{ij} = 1)$
- 在$G(R)$中, $\forall x_i \,.\, \forall x_j \,.\, \forall x_k$, 如果有有向边 $x_i \to x_j, x_j \to x_k$, 那么必有有向边$x_i \to x_k$.

二. 关系的运算

(三) 七种性质

5. 传递性: 我们来证明一下这些性质

Def. $R \subseteq X \times X$ is transitive if

$$\forall a, b, c \in X . (aRb \land bRc \to aRc)$$

$\Leftrightarrow R \circ R \subseteq R$ (封闭性)

Proof. $\Leftarrow$: 对任意(a, b)

$$(a, b) \in R \circ R$$

$$\implies \exists c . (a, c) \in R \land (b, c) \in R$$

$$\implies (a, b) \in R$$

$\Rightarrow$: 对任意a, b, c

$(a, b) \in R \land (b, c) \in R \implies (a, c) \in R \circ R \implies (a, c) \in R$

二. 关系的运算

(三) 七种性质

5. 传递性: 我们来证明一下这些性质

Def. $R \subseteq X \times X$ is transitive if

$$\forall a, b, c \in X\,.\,(aRb \wedge bRc \to aRc)$$

$\Leftrightarrow R^{-1}$是传递的

Proof. 对任意a, b, c

$$a, b, c \in X$$

$$\Longleftrightarrow aR^{-1}b \wedge bR^{-1}c \to aR^{-1}c$$

$$\Longleftrightarrow bRa \wedge cRb \to cRa$$

$$\Longleftrightarrow cRb \wedge bRa \to cRa \qquad \text{满足传递规律}$$

二. 关系的运算

(三) 七种性质

5. 传递性: 我们来证明一下这些性质

Def. $R \subseteq X \times X$ is transitive if

$$\forall a, b, c \in X\,.\,(aRb \wedge bRc \to aRc)$$

$\Leftrightarrow$ 在$M(R \circ R)$矩阵r'_{ij}中, $\forall i\,.\,\forall j\,.\,(r'_{ij} = 1 \to r_{ij} = 1)$

Proof. 由于复合的定义, 有$r'_{ij} = 1 \iff (\exists k\,.\,r_{ik} = 1 \wedge r_{kj} = 1)$

由于有传递性, $r_{ij} = 1$.

二. 关系的运算

(三) 七种性质

什么样的集合具有

- 自反, 反对称, 传递 $-$ $(\mathbb{R}, \leq)$
- 自反, 对称, 反对称, 传递 $-$ $(\mathbb{R}, =)$
- 自反, 对称, 传递 $-$ $\{(x, y) \mid x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N}\}$

二. 关系的运算

(三) 七种性质

6,7 和矩阵没有啥大关系, 于是跳过…

二. 关系的运算

(三) 七种性质

设A是有限的集合, $|A| = n$, R是A上的二元关系, 那么:

$$\bigcup_{i=1}^{k} R^i = \bigcup_{i=1}^{n} R^i, \quad 任意的k > n$$

Proof. 由于集合的关系, 容易得到$\bigcup_{i=1}^{k} R^i \supseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$

我们希望证明$\bigcup_{i=1}^{k} R^i \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$

Proof ahead!

二. 关系的运算

(三) 七种性质

设A是有限的集合, $|A| = n$, R是A上的二元关系, 那么:

$$\bigcup_{i=1}^{k} R^i = \bigcup_{i=1}^{n} R^i, \quad \text{任意的} k > n$$

我们希望证明$\bigcup_{i=1}^{k} R^i \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$

接上页. 左边式子=$\bigcup_{i=1}^{n} R^i \cup \bigcup_{i=n+1}^{k} R^i$, 只需要证明对于任意的$k > n$, 有$R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$.

对于任意的$(a, b) \in R^k$, 考虑其复合的过程, 一定存在$a_1, a_2, \cdots, a_k \in A$, 使得:

$$(a, a_1) \in R, (a_1, a_2) \in R, (a_2, a_3) \in R, \cdots, (a_k, a_b) \in R$$

一共$k+1$个元素.

由于集合的大小为n, 由抽屉原理(把k+1个球放入k个抽屉里面, 至少有一个抽屉有2个球)知道, 这里一定有重复的元素. 不妨假设$a_i = a_j (i < j)$

二. 关系的运算

(三) 七种性质

设A是有限的集合, $|A|=n$, R是A上的二元关系, 那么:

$$\bigcup_{i=1}^{k} R^i = \bigcup_{i=1}^{n} R^i, \quad 任意的k>n$$

接上页. 左边式子=$\bigcup_{i=1}^{n} R^i \cup \bigcup_{i=n+1}^{k} R^i$, 只需要证明对于任意的$k>n$, 有$R^k \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$.

对于任意的$(a,b) \in R^k$, 考虑其符合的过程, 一定存在$a_1, a_2, \cdots, a_k \in A$, 使得:

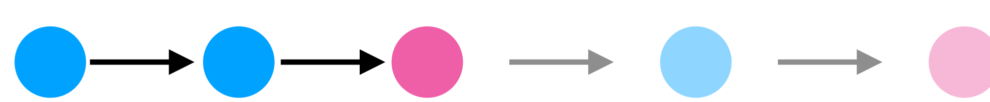
$$(a,a_1) \in R, (a_1,a_2) \in R, (a_2,a_3) \in R, \cdots, (a_k,a_b) \in R$$

一共$k+1$个元素.

由于集合的大小为n, 由抽屉原理(把k+1个球放入k个抽屉里面, 至少有一个抽屉有2个球)知道, 这里一定有重复的元素. 不妨假设$a_i = a_j (i<j)$

我们删去从i到j的复合的所有元素$(a_i,a_{i+1}) \in R, (a_{i+1},a_{i+2}) \in R, \cdots, (a_{j-1},a_j) \in R$,

于是$(a,b) \in R^{k'}, k' = k-(j-i)$.



二. 关系的运算

(三) 七种性质

设A是有限的集合, $|A| = n$, R是A上的二元关系, 那么:

$$\bigcup_{i=1}^{k} R^i = \bigcup_{i=1}^{n} R^i, \quad \text{任意的} k > n$$

接上页. 分类讨论: 如果$k' \leq n$, 那么$(a, b) \in \bigcup_{i=1}^{n} R^i$. 否则, 重复上述过程. 得证. ■

这让我想起了高等代数里面线性变换里面有的也用到了类似的技巧

二. 关系的运算

(三) 七种性质

Let’s count!

学习更加高级的数数技巧

https://www.bilibili.com/video/BV1C34y1R7wf

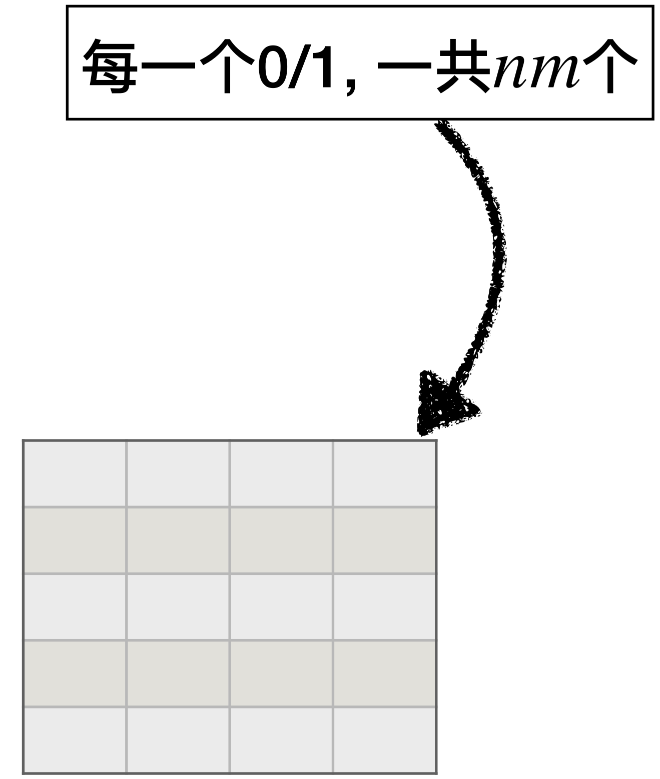
by 韩涛(韩老师讲数学@bilibili)

二. 关系的运算

(三) 七种性质

Q1. 问 A 到 B 的二元关系共多少个

考虑关系矩阵, 就是$2^{n\times m}$个

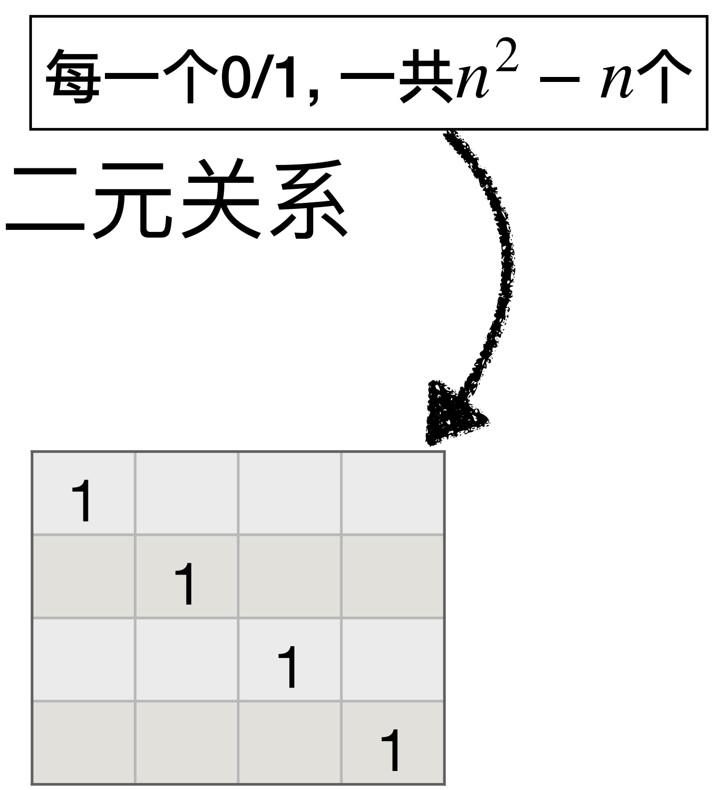


Q2. 问 A 到 A 的二元关系共多少个

考虑关系矩阵, 就是$2^{n\times n}$个

Q3. 多少种不同的自反的（ 反自反的） 二元关系

考虑关系矩阵, 就是$2^{n\times n-n}$个



二. 关系的运算

(三) 七种性质

Q4. 多少种不同对称的二元关系

考虑关系矩阵, 就是$2^{n(n+1)/2}$个

每一个0/1, 一共$n(n+1)/2$个

X	X	X	X
	X	X	X
		X	X
			X

Q5. 多少种不同反对称的二元关系

在$M(R)$中, $\forall i\,.\,\forall j\,.\,(i \neq j \wedge r_{ij} = 1 \rightarrow r_{ji} = 0)$

第一步: 考虑对角线: 2^n

第二步: 考虑对角线以外的元素: (1, 0) or (0, 1) or(0,0)

– $3^{n(n-1)/2}$

分步相乘:$2^n 3^{n(n-1)/2}$

三. 闭包

1. 闭包

Def. 包含一些给定对象, 具有指定性质的最小集合

例子:

包含给定关系R的最小自反关系, 称为R的自反闭包

$$\iff \begin{cases} R \subseteq R' \\ R' \text{是自反的} \\ \forall S \,.\, (R \subseteq S \land S \text{ is reflexive}) \to R' \subseteq S \end{cases}$$

上述有颜色的地方可以换做: 对称, 传递.

三. 闭包

2. 自反(r), 对称(s), 传递(t)闭包的一些性质

Th. 设$R \subseteq A \times A$, 并且$A \neq \emptyset$,

- $r(R) = R \cup I_A$
- $s(R) = R \cup R^{-1}$
- $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots \triangleq R^+$

这个是循环的, 一定会到一定程度就可以终止

Proof ahead!

三. 闭包

2. 自反(r), 对称(s), 传递(t)闭包的一些性质

Th. 设$R \subseteq A \times A$, 并且$A \neq \emptyset$,

- $r(R) = R \cup I_A$
- $s(R) = R \cup R^{-1}$
- $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots \triangleq R^+$

这个是循环的, 一定会到一定程度就可以终止

对于r(A)的证明:

(1)因为 $I_A \subseteq I_A \cup R$, 所以$I_A \cup R$ 具有自反性;

(2)显然， $R \subseteq I_A \cup R$

(3)对 A 上任意关系 R'', 若 $R \subseteq R''$, 且 R'' 是 自反的, 即证 $I_A \cup R \subset R''$. 因为 R'' 是自反的, 所以$I_A \subset R''$, 又 $R \subseteq R''$, 所以 $I_A \cup R$

将I_A添加到关系R中，则可得到R的自反闭包

三. 闭包

2. 自反(r), 对称(s), 传递(t)闭包的一些性质

Th. 设$R \subseteq A \times A$, 并且$A \neq \emptyset$,

- $r(R) = R \cup I_A$
- $s(R) = R \cup R^{-1}$
- $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots \triangleq R^+$

这个是循环的, 一定会到一定程度就可以终止

对于s(A)的证明:

任取$(x, y) \in R \cup R^{-1}$, 那么若$(x, y) \in R$, $(y, x) \in R^{-1}$. 则$(y, x) \in R \cup R^{-1}$. 若$(x, y) \in R^{-1}$, 则$(y, x) \in R$, 即$(y, x) \in R \cup R^{-1}$. 由上述, $R \cup R^{-1}$是对称的

任取其满足条件$R \subseteq R_1$并且R_1是对称的R_1, 由对称关系的充要条件得$R_1 = R_1^{-1}$. 由于$R \subseteq R_1$, 有$R^{-1} \subseteq R_1^{-1}$. 也就是$R \cup R^{-1} \subseteq R_1 \cup R_1^{-1} = R_1$.

三. 闭包

2. 自反(r), 对称(s), 传递(t)闭包的一些性质

Th. 设$R \subseteq A \times A$, 并且$A \neq \emptyset$,

- $r(R) = R \cup I_A$
- $s(R) = R \cup R^{-1}$
- $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots \cup R^k \triangleq R^+$

对于t(R): 运用数学归纳法:

这个是循环的, 一定会到一定程度就可以终止

(1)对于任意 $x, y, z \in S$, 若 $(x, y) \in \bigcup_{i=1}^{k} R^i, (y, z) \in \bigcup_{i=1}^{k} R^i$, 则存在自然数 j, k, 使

$(x, y) \in R^j$, $(y, z) \in R^k$, 故 $(x, z) \in R^j \cdot R^k = R^{j+k}$, 从而$(x, z) \in \bigcup_{i=1}^{k} R^i$所以,

$\bigcup R^i$具有传递性.

(2)显然, $R \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} R^i$

三. 闭包

2. 自反(r), 对称(s), 传递(t)闭包的一些性质

Th. 设$R \subseteq A \times A$, 并且$A \neq \emptyset$,

- $r(R) = R \cup I_A$
- $s(R) = R \cup R^{-1}$
- $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots \cup R^k \triangleq R^+$

对于t(R): 运用数学归纳法:

这个是循环的, 一定会到一定程度就可以终止

(接上页)对A上任意关系R'', 若$R \subseteq R''$且R''是传递的, 要证$\bigcup_{i=1}^{k} R^i \subseteq R''$. 使用数学

归纳法:

- 对$n = 1$, 有$R^1 \subseteq R''$显然.
- 假设$n = k$时$R^k \subseteq R''$, 任取$(x, y) \in R^{k+1}$, 那么有z使得$(x, z) \in R^k, (z, y) \in R$ 根据归纳假设以及题设, 有$(x, z) \in R'', (z, y) \in R''$. 由于$R''$是传递的, 就有 $(x, y) \in R'', R^{k+1} \subseteq R$. 因此$\bigcup_{i=1}^{k} R^i \subseteq R''$.

三. 闭包

2. 自反(r), 对称(s), 传递(t)闭包的一些性质

Th. 设$R \subseteq A \times A$, 并且$A \neq \emptyset$,

- $r(R) = R \cup I_A$
- $s(R) = R \cup R^{-1}$
- $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots \cup R^k \triangleq R^+$

这种情形是很普遍的, 比如高代...

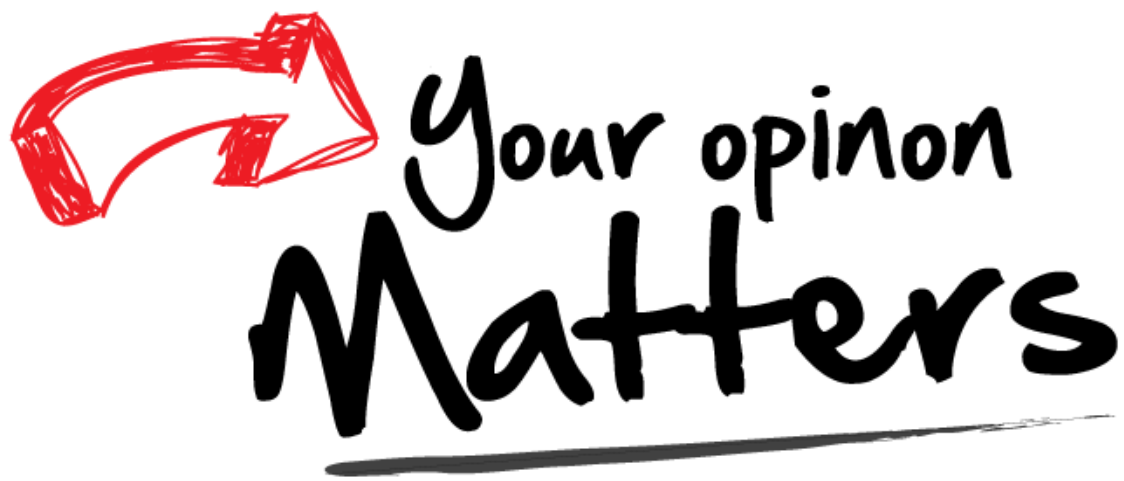
定理5.46 设V是$\mathbb{F}$上的线性空间, $\mathscr{B} \in \mathrm{End}V$是幂零线性变换, 则 V可以分解为$\mathscr{B}$的循环子空间的直和. 并且在同构意义下, 分解是唯一的. 也就是如果$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_m = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_t$为$\mathscr{B}$的循环子空间分解,
则$m = t$且重排 $W_1 .. W_m$ 的顺序后存在可逆线性变换$\mathscr{A} \in \mathrm{End}V$, 使得$\mathscr{A}(V_i) = W_i (1 \leq i \leq m)$.

循环子空间

参考文章和课件

1. 薛思清《离散数学2022》关系(1)
2. 关系闭包(知乎) https://zhuanlan.zhihu.com/p/601168086

Thank You!



QQ: 2095728218
Email: micoael@qq.com
(学校) gwzhang@cug.edu.cn