集合论II

二元关系: 等价关系与函数关系

对应《问题求解》

偏序关系与等价关系 函数关系


examples


借题发挥


Learning by
Doing

一. 偏序关系

引例:

- 实数集上的“不大于”关系
- 非空集合A的幂集合上定义的“子集”

都是具有一个比另一个大/小的感觉…

1. 偏序关系

定义 3.8.1. 设 R 是非空集合 A 上的关系, 如果 A 是

(1) 自反的 $(\forall x \in X, x \preceq x)$,

(2) 对称的 $(\forall x, y \in X, x \preceq y \wedge y \preceq x \rightarrow x = y)$

(3) 传递的 $(\forall x, y, z \in X. x \preceq y \wedge y \preceq z \rightarrow x \preceq z)$, 就称作 R 是 A 上的偏序关系. 通常记为 $\preceq$. 整个序关系可以写作 $(X, \preceq)$

一. 偏序关系

问: 我们能够怎么样的更好地展示出这样的关系?

1. 偏序关系

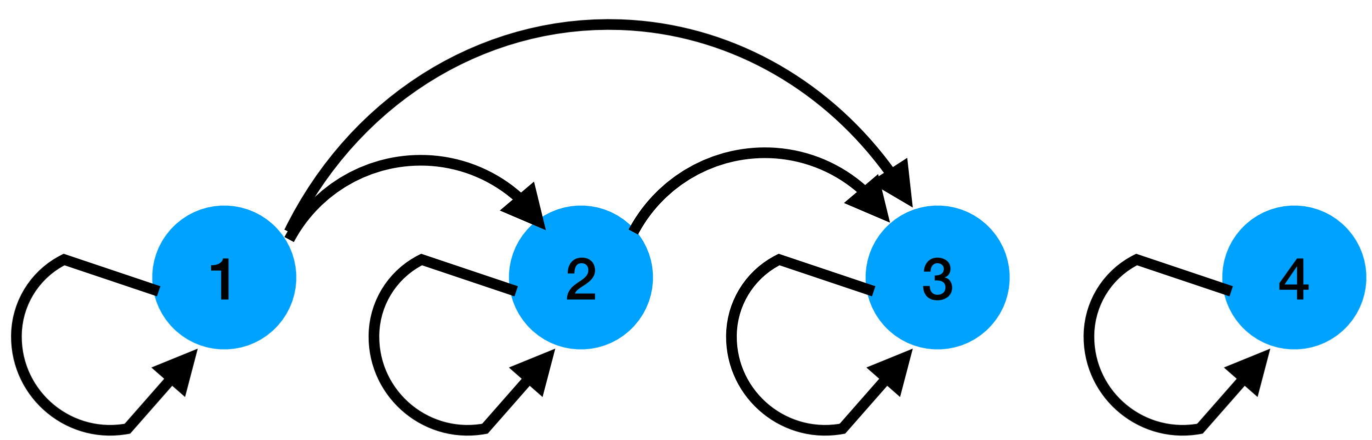
定义 3.8.1. 设 R 是非空集合 A 上的关系, 如果 A 是

(1) 自反的 $(\forall x \in X, x \preceq x)$,

(2) 对称的 $(\forall x, y \in X, x \preceq y \wedge y \preceq x \rightarrow x = y)$

(3) 传递的 $(\forall x, y, z \in X. x \preceq y \wedge y \preceq z \rightarrow x \preceq z)$, 就称作 R 是 A 上的偏序关系. 通常记为 $\preceq$. 整个序关系可以写作 $(X, \preceq)$

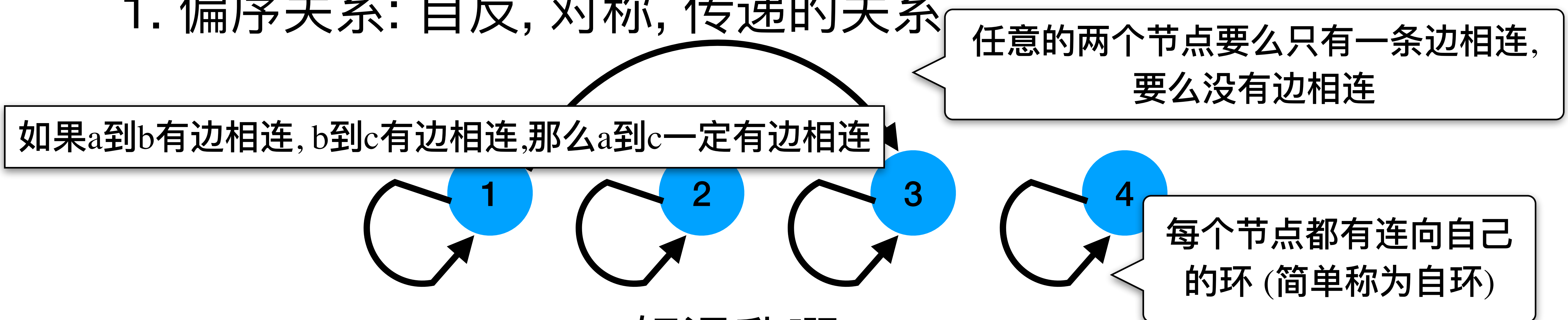
举一个例子, 试着用图形表示一下…



好混乱啊…

一. 偏序关系

1. 偏序关系: 自反, 对称, 传递的关系



好混乱啊...

2. 简化的方法

一. 偏序关系

1. 偏序关系: 自反, 对称, 传递的关系

任意的两个节点要么只有一条边相连,
要么没有边相连

如果a到b有边相连, b到c有边相连,那么a到c一定有边相连

好混乱啊...

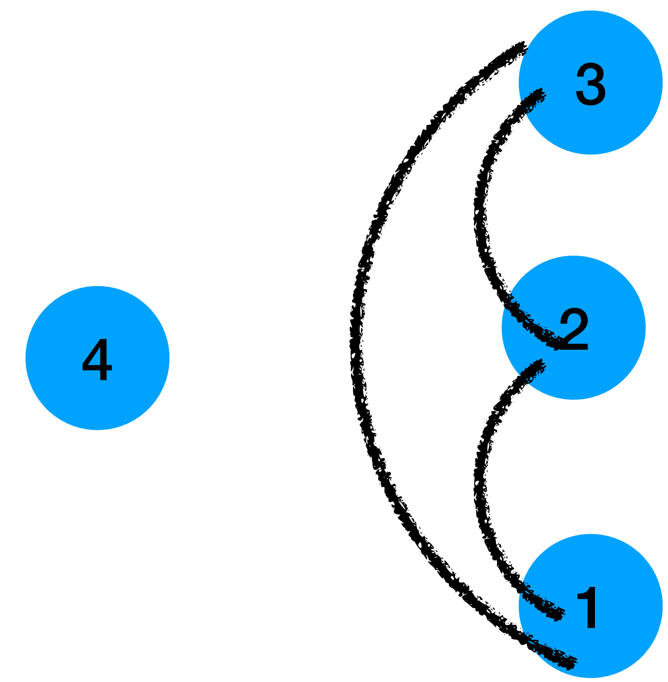
2. 简化的方法

- 去掉关系图中的所有的自环

一. 偏序关系

1. 偏序关系: 自反, 对称, 传递的关系.

如果a到b有边相连, b到c有边相连,那么a到c一定有边相连



好混乱啊...

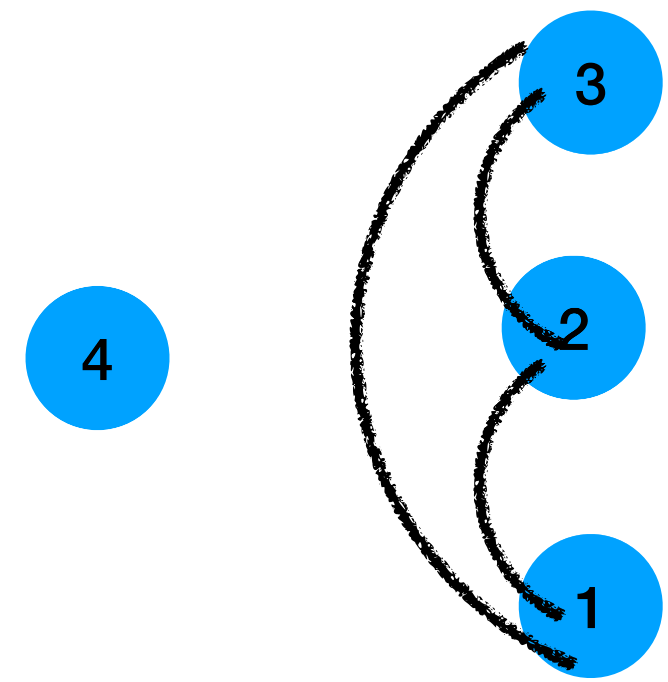
2. 简化的方法

- 去掉关系图中的所有的自环
- (指定次序关系) 如果任意的$x \preceq y$, 那么把x画在y的下方, 之后去掉这个边的箭头

一. 偏序关系

1. 偏序关系: 自反, 对称, 传递的关系.

如果a到b有边相连, b到c有边相连,那么a到c一定有边相连



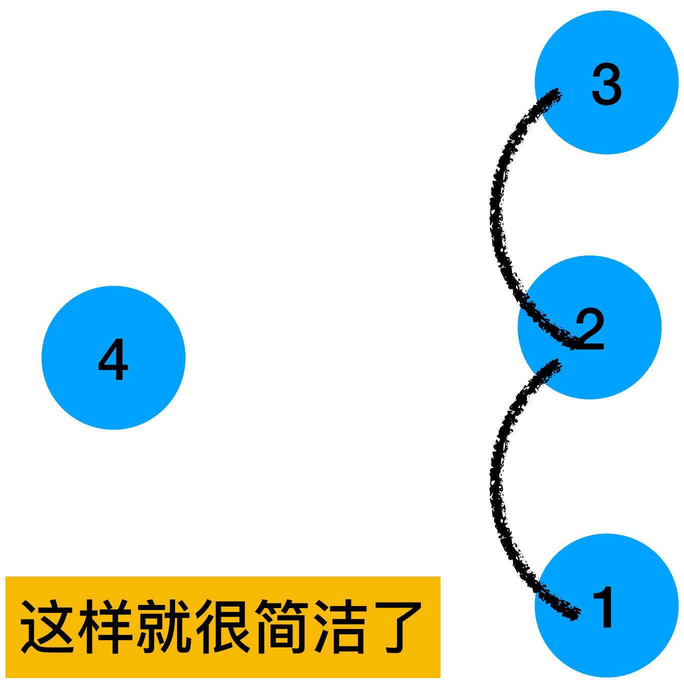
好混乱啊...

2. 简化的方法

- 去掉关系图中的所有的自环
- (指定次序关系) 如果任意的$x \preceq y$, 那么把x画在y的下方, 之后去掉这个边的箭头
- (只关注基本的箭头) 如果$x \to y, y \to z$, 那么$x \to z$的边

一. 偏序关系

1. 偏序关系: 自反, 对称, 传递的关系.



2. 简化的方法

- 去掉关系图中的所有的自环
- (指定次序关系) 如果任意的$x \preceq y$, 那么把x画在y的下方, 之后去掉这个边的箭头
- (只关注基本的箭头) 如果$x \to y, y \to z$, 那么$x \to z$的边

一. 偏序关系

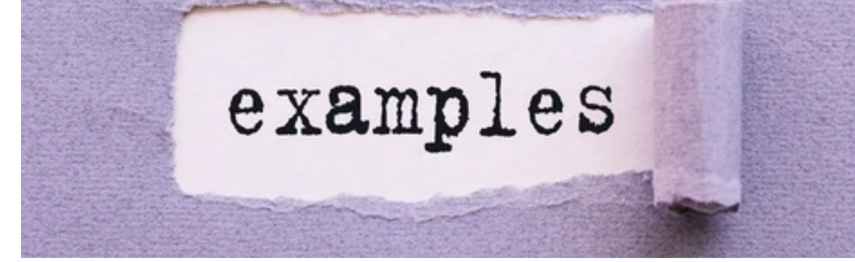
1. 偏序关系: 自反, 对称, 传递的关系.

2. Hasse图

- 去掉关系图中的所有的自环
- (指定次序关系) 如果任意的$x \preceq y$, 那么把x画在y的下方, 之后去掉这个边的箭头
- (只关注基本的箭头) 如果$x \to y, y \to z$, 那么$x \to z$的边

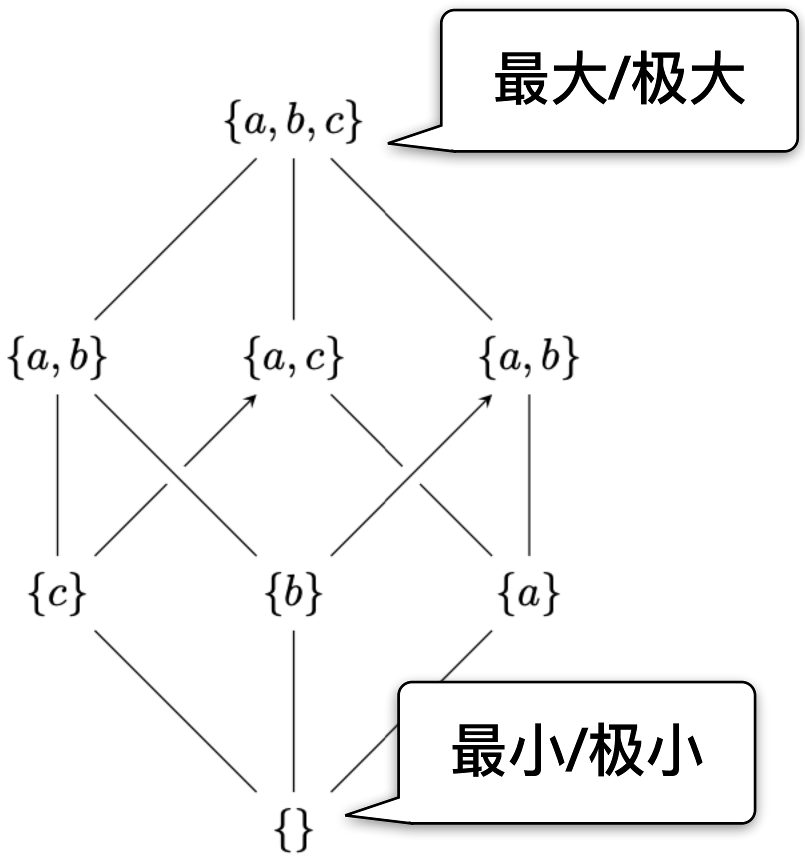
或者说, 有向无环图(DAG)上的可达关系

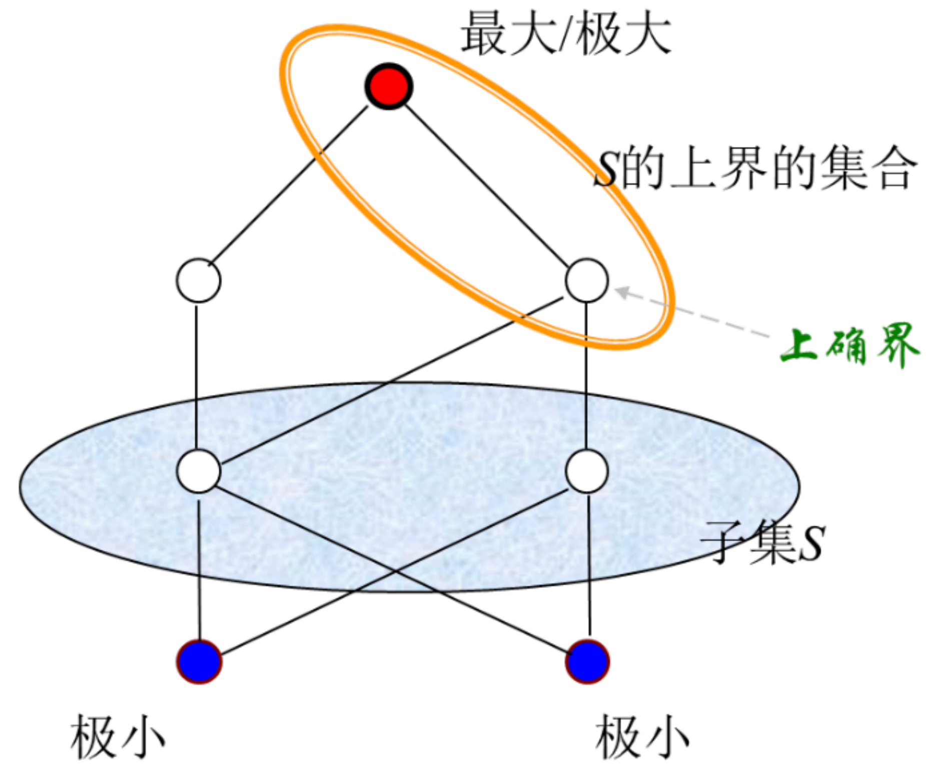
下面我们来刻画一下大小关系 — 什么是大? 什么是小?



一. 偏序关系

Hasse图的例子



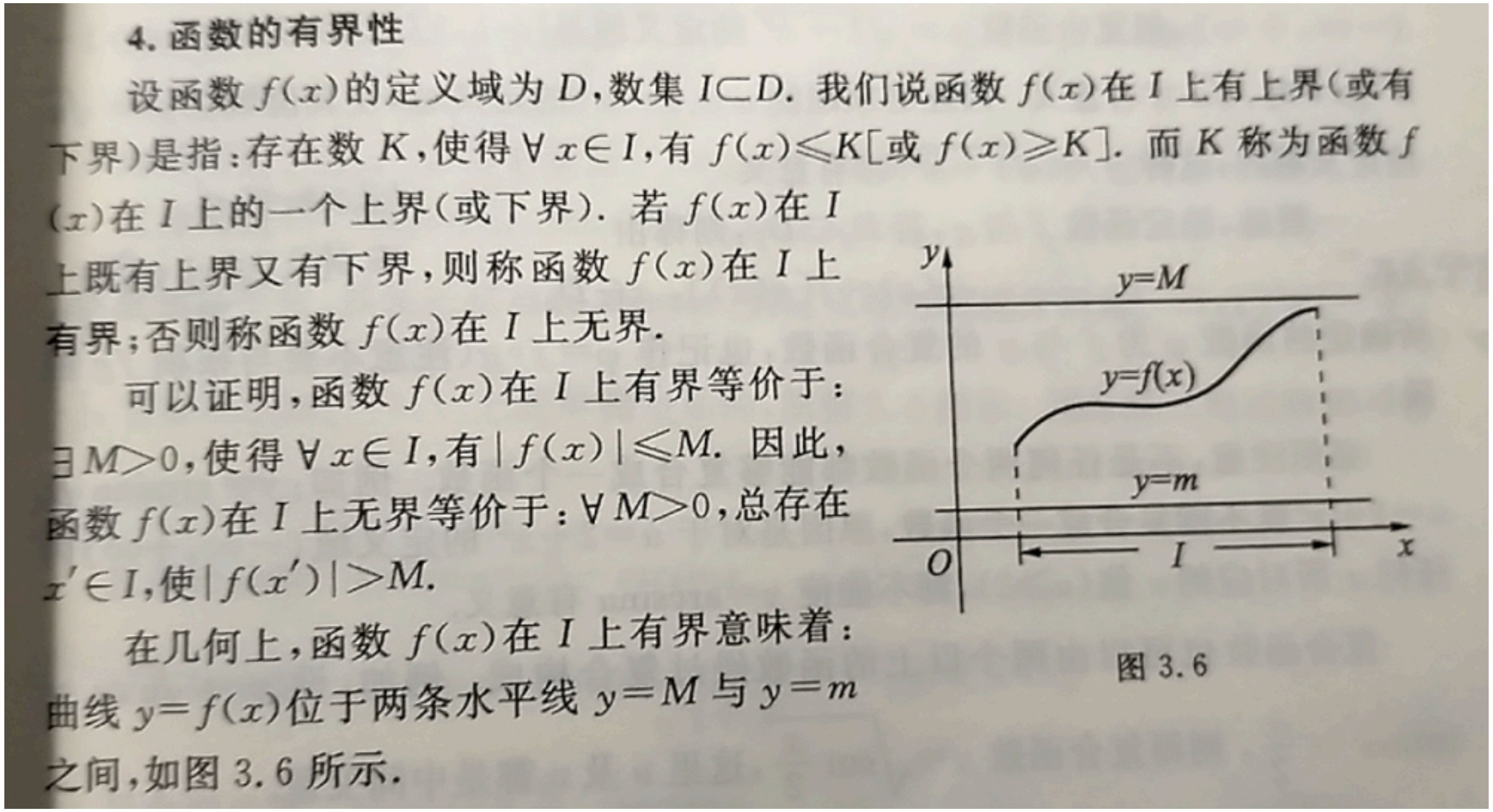


集合的包含关系

$A=\{a,b,c\}$, PSET(A)上的关系

一. 偏序关系

回忆《高等数学》A1:



4. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $I\subset D$. 我们说函数 $f(x)$ 在 I 上有上界（或有下界）是指：存在数 K，使得 $\forall x\in I$，有 $f(x)\leqslant K$[或 $f(x)\geqslant K$]. 而 K 称为函数 $f(x)$ 在 I 上的一个上界（或下界）. 若 $f(x)$ 在 I 上既有上界又有下界，则称函数 $f(x)$ 在 I 上有界；否则称函数 $f(x)$ 在 I 上无界.

可以证明，函数 $f(x)$ 在 I 上有界等价于：$\exists M>0$，使得 $\forall x\in I$，有 $|f(x)|\leqslant M$. 因此，函数 $f(x)$ 在 I 上无界等价于：$\forall M>0$，总存在 $x'\in I$，使 $|f(x')|>M$.

在几何上，函数 $f(x)$ 在 I 上有界意味着：曲线 $y=f(x)$ 位于两条水平线 $y=M$ 与 $y=m$ 之间，如图 3.6 所示.

图 3.6

最大值, 最小值, 上(下)(确)界

一. 偏序关系

3. 极大元, 极小元

定义 3.8.2 (偏序集的极大元, 极小元). 令 $\preceq \subseteq X \times X$ 是 X 上的偏序. 设 $a \in X$:

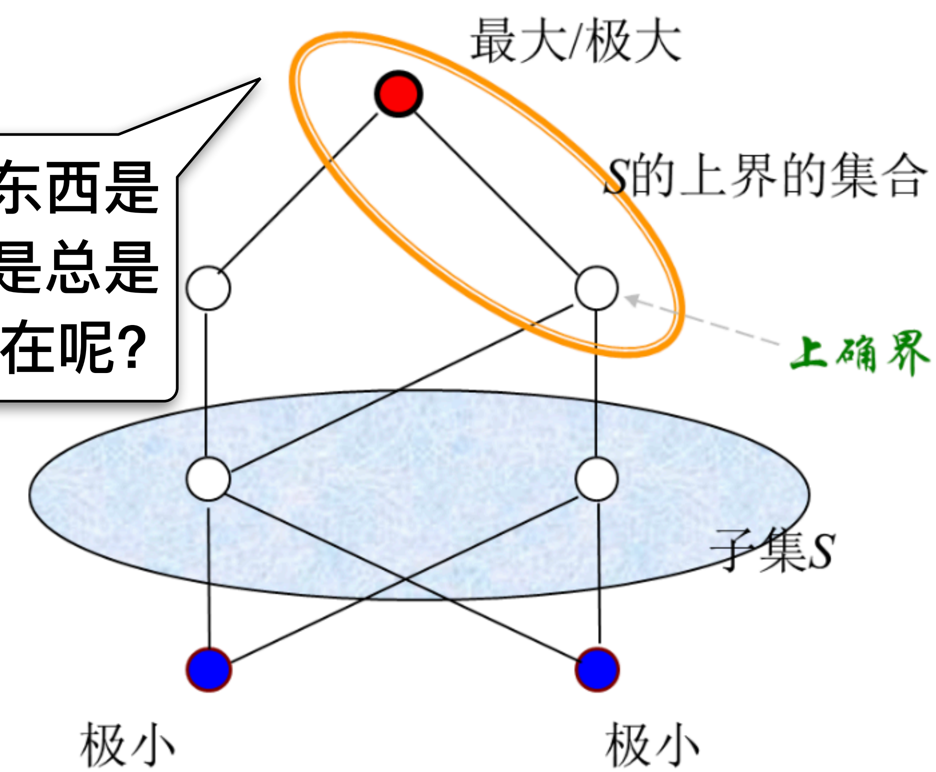
- 如果 $\forall x \in X. \neg(x \prec a)$, 那么称 a 为 X 的极大元.
- 如果 $\forall x \in X. \neg(a \prec x)$, 那么称 a 为 X 的极小元.

定理 3.8.1. 有限偏序集一定含有极小元.

想法: 抓一个, 问问, 是不是. 不是, 抓一个更小的, 问问因为是有限的, 这个过程一定会终止.

Admitted.

这东西是不是总是存在呢?



一. 偏序关系

3. 极大元, 极小元

定义 3.8.2 (偏序集的极大元, 极小元). 令 $\preceq \subseteq X \times X$ 是 X 上的偏序. 设 $a \in X$:

- 如果 $\forall x \in X.\neg(x \prec a)$, 那么称 a 为 X 的极大元.
- 如果 $\forall x \in X.\neg(a \prec x)$, 那么称 a 为 X 的极小元.

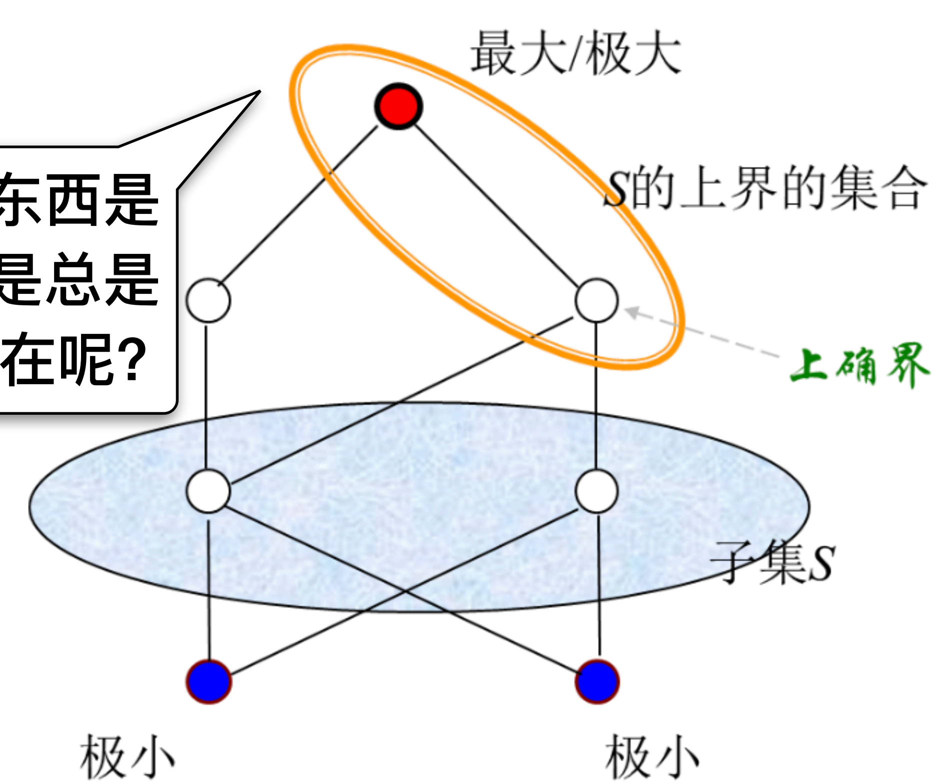
极大元和极小元不总是存在

比如实数上面的大于关系

但是存在了就一定唯一了.

事实上, 如果你曾经看过一点数学文本的话, 我们会发现存在性, 唯一性是很必要的!

这东西是不是总是存在呢?



一. 偏序关系

3. 极大元, 极小元

定义 3.8.2 (偏序集的极大元, 极小元). 令 $\preceq \subseteq X \times X$ 是 X 上的偏序. 设 $a \in X$:

- 如果 $\forall x \in X.\neg(x \prec a)$, 那么称 a 为 X 的极大元.
- 如果 $\forall x \in X.\neg(a \prec x)$, 那么称 a 为 X 的极小元.

定理 3.8.2 (极大元极小元唯一性). 偏序集 $(X, \preceq)$ 如果存在最大元或者最小元, 那么一定是唯一的.

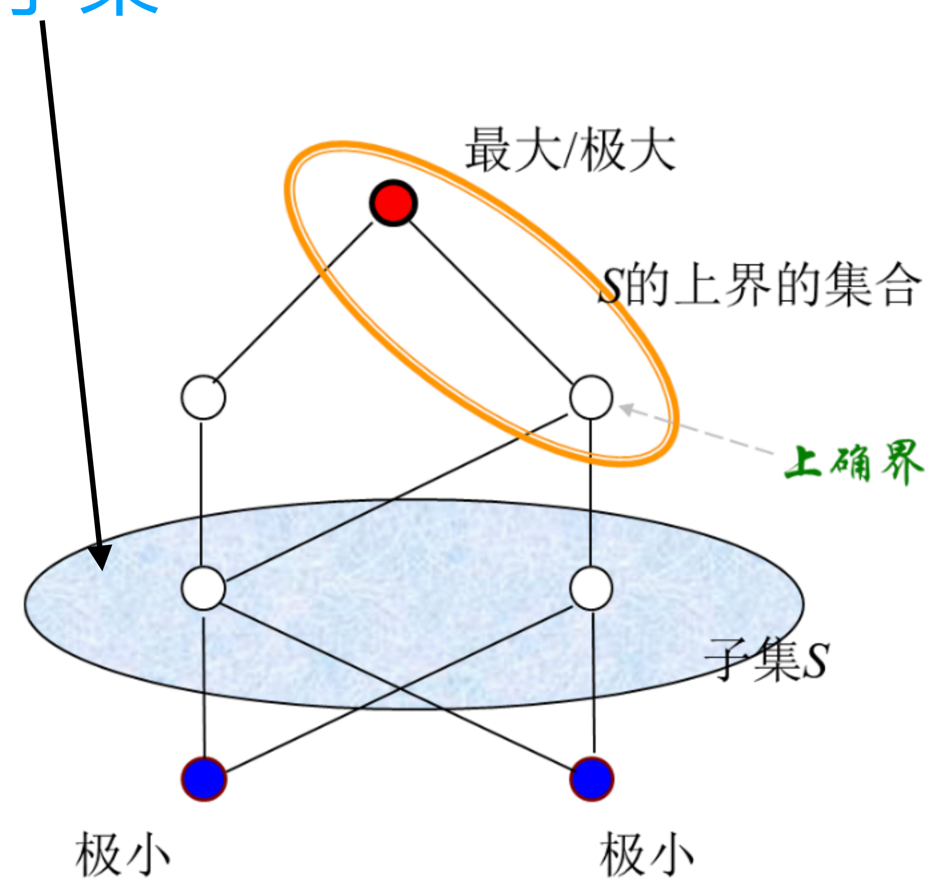
证明. 假设存在两个不同的最大元 x,y. 那么根据定义, 取得特殊的两个元素: $x \preceq y \wedge y \preceq x$, 根据偏序关系的反对称性, 立即得到 $x = y$. 因此与假设矛盾. □

证明也是一如既往地反证法

一. 偏序关系

4. 上界与下界

上界和下界是对于关系里面的一个子集而言的.



一. 偏序关系

4. 上界与下界

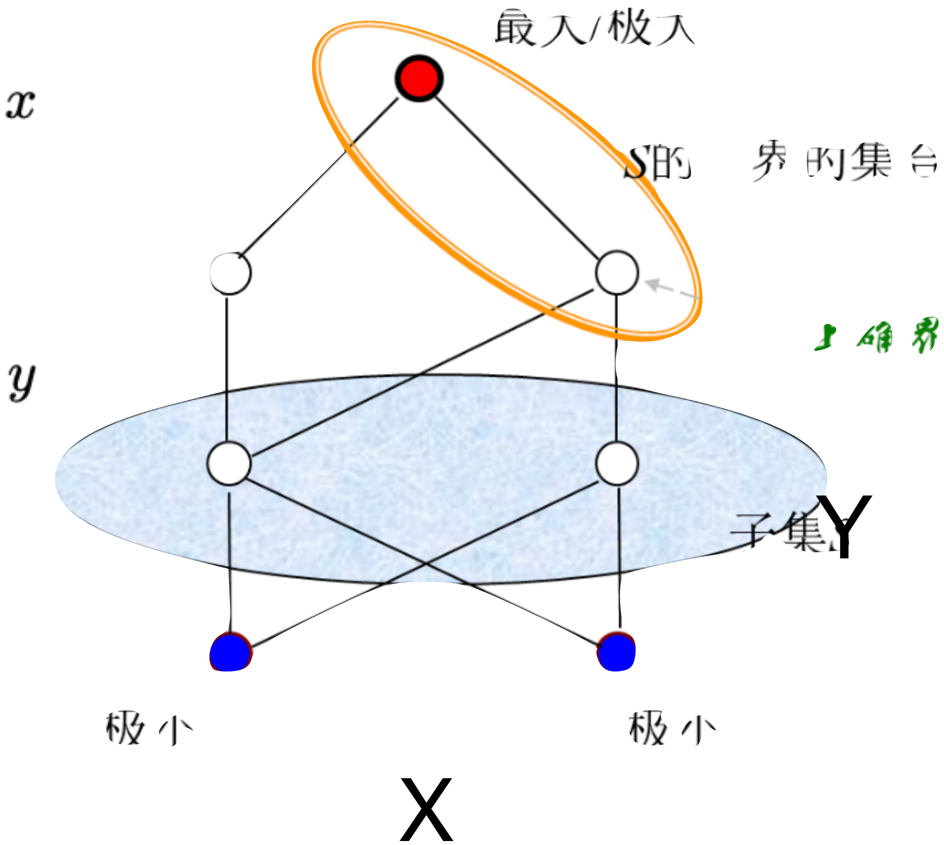
定义 3.8.4 (上界与下界). 设 $(X, \preceq)$ 是偏序集, 对于 $Y \subseteq X$, 如果:

$$\exists x \in X. \forall y \in Y. y \preceq x$$

那么 x 为 Y 的上界. 类似的, 如果

$$\exists x \in X. \forall y \in Y. x \preceq y$$

那么称 x 为 Y 的下界.



5. 上确界与下确界

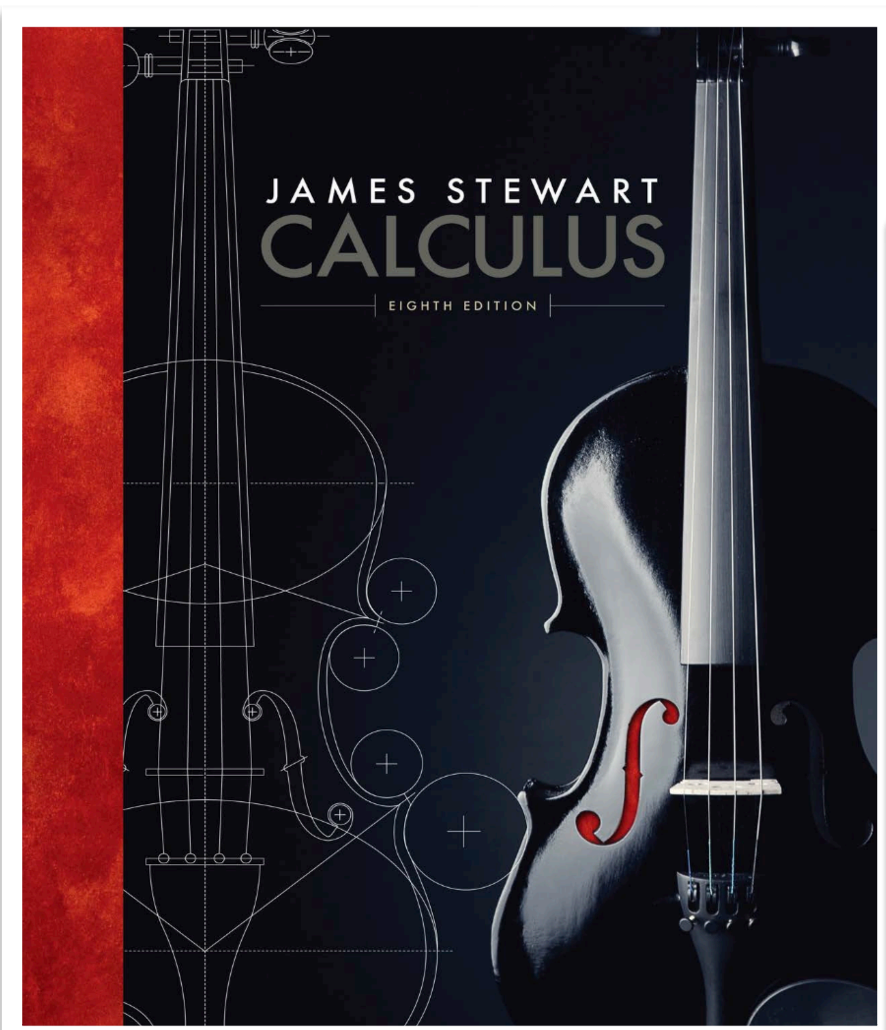
定义 3.8.5 (最小上界 (least upper bound)). 设 $(X, \preceq)$ 是偏序集, 对于 $Y \subseteq X$, $x \in x$ 是 Y 的上界, 对于 Y 的所有上界 x', 若有 $x \preceq x'$, 则称 x 是 Y 的最小上界.

定义 3.8.6 (最大下界 (greatest upper bound)). 设 $(X, \preceq)$ 是偏序集, 对于 $Y \subseteq X$, $x \in x$ 是 Y 的下界, 对于 Y 的所有下界 x', 若有 $x' \preceq x$, 则称 x 是 Y 的最大下界.

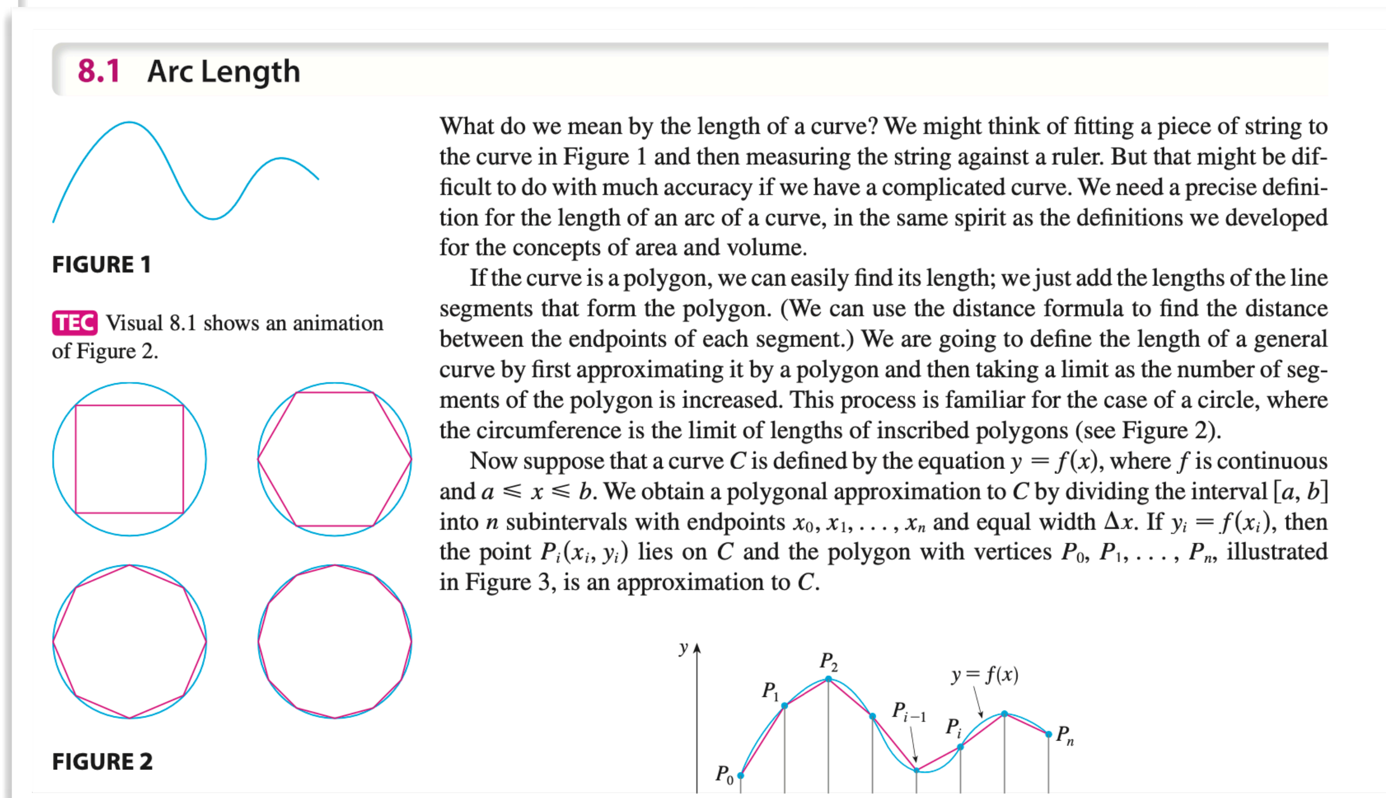
一. 偏序关系

数学类课程很难以理解?

- 只是基础不够, 高考的思维复杂度过于低下, 通过计算复杂度来选拔所谓的 “人才”.
- 我们总有更好的方法来学习它!



非常啰嗦, 把你当做傻子来教.



8.1 Arc Length

FIGURE 1

TEC Visual 8.1 shows an animation of Figure 2.

FIGURE 2

What do we mean by the length of a curve? We might think of fitting a piece of string to the curve in Figure 1 and then measuring the string against a ruler. But that might be difficult to do with much accuracy if we have a complicated curve. We need a precise definition for the length of an arc of a curve, in the same spirit as the definitions we developed for the concepts of area and volume.

If the curve is a polygon, we can easily find its length; we just add the lengths of the line segments that form the polygon. (We can use the distance formula to find the distance between the endpoints of each segment.) We are going to define the length of a general curve by first approximating it by a polygon and then taking a limit as the number of segments of the polygon is increased. This process is familiar for the case of a circle, where the circumference is the limit of lengths of inscribed polygons (see Figure 2).

Now suppose that a curve C is defined by the equation $y = f(x)$, where f is continuous and $a \leqslant x \leqslant b$. We obtain a polygonal approximation to C by dividing the interval $[a, b]$ into n subintervals with endpoints $x_0, x_1, \ldots, x_n$ and equal width Δx. If $y_i = f(x_i)$, then the point $P_i(x_i, y_i)$ lies on C and the polygon with vertices $P_0, P_1, \ldots, P_n$, illustrated in Figure 3, is an approximation to C.

一. 偏序关系

小故事: 当时看见 $\sum$ 记号很害怕, 最后看了jyy的视频才缓解了恐惧

⇒做事情做得好, 大部分是已经有经验了.

⇒总是有更好的方式帮助我们做好一件事情的.

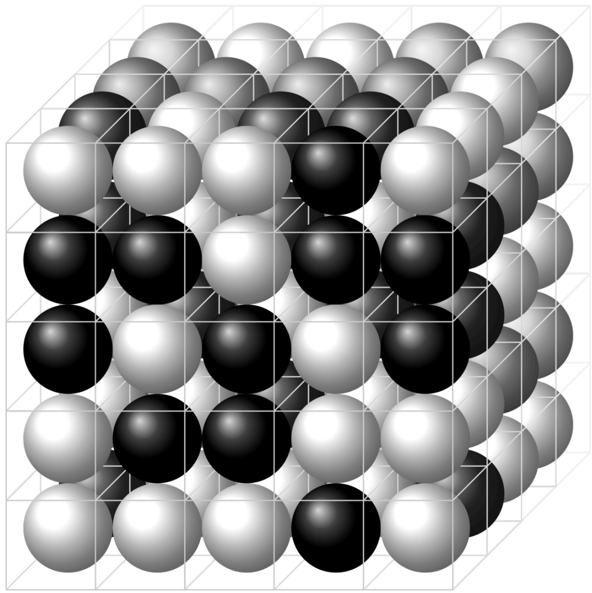
一. 偏序关系

5. 上确界与下确界

定义 3.8.5 (最小上界 (least upper bound)). 设 $(X, \preceq)$ 是偏序集, 对于 $Y \subseteq X$, $x \in x$ 是 Y 的上界, 对于 Y 的所有上界 x', 若有 $x \preceq x'$, 则称 x 是 Y 的最小上界.

定义 3.8.6 (最大下界 (greatest upper bound)). 设 $(X, \preceq)$ 是偏序集, 对于 $Y \subseteq X$, $x \in x$ 是 Y 的下界, 对于 Y 的所有下界 x', 若有 $x' \preceq x$, 则称 x 是 Y 的最大下界.

如果任意的两个元素都有最小上界和最大下界, 那么就称 $(X, \preceq)$为一个格(lattice).



* Lattice本来也有晶胞的意思…

A three-dimensional lattice filled with two molecules A and B, here shown as black and white spheres.

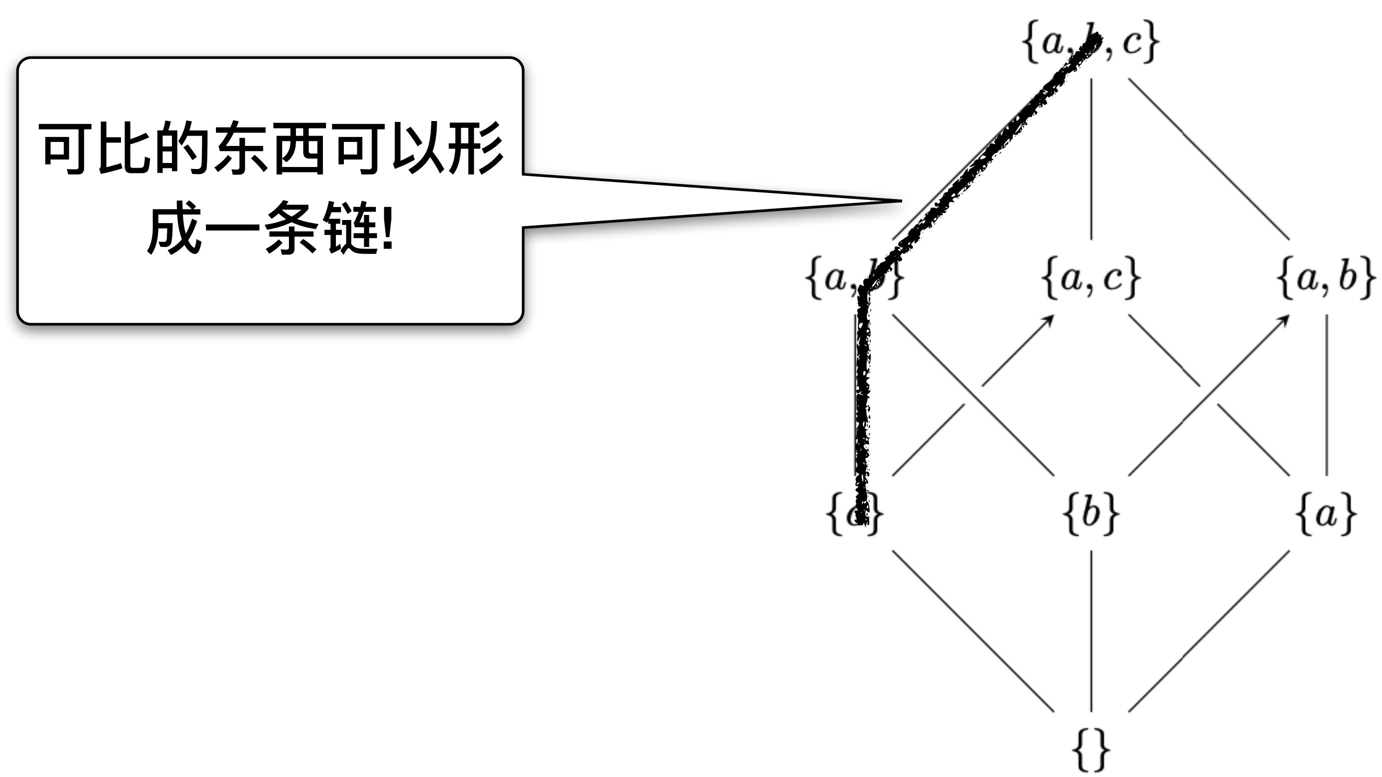
一. 偏序关系

6. 严格的偏序关系

定义 3.8.8 (严格小于 (Strictly less than)). $a \prec b$ 被定义为 $a \preceq b \wedge a \neq b$.

7. 偏序集元素的可比性: a, b要么$a > b$, 要么$b > a$.

定义 3.8.9. 设 $(X, \preceq)$ 是偏序集, 对于 $a, b \in X$, 如果$(a \vee b) \wedge (b \vee a)$ 那么称为可比的. 否则, 就称为不可比的.

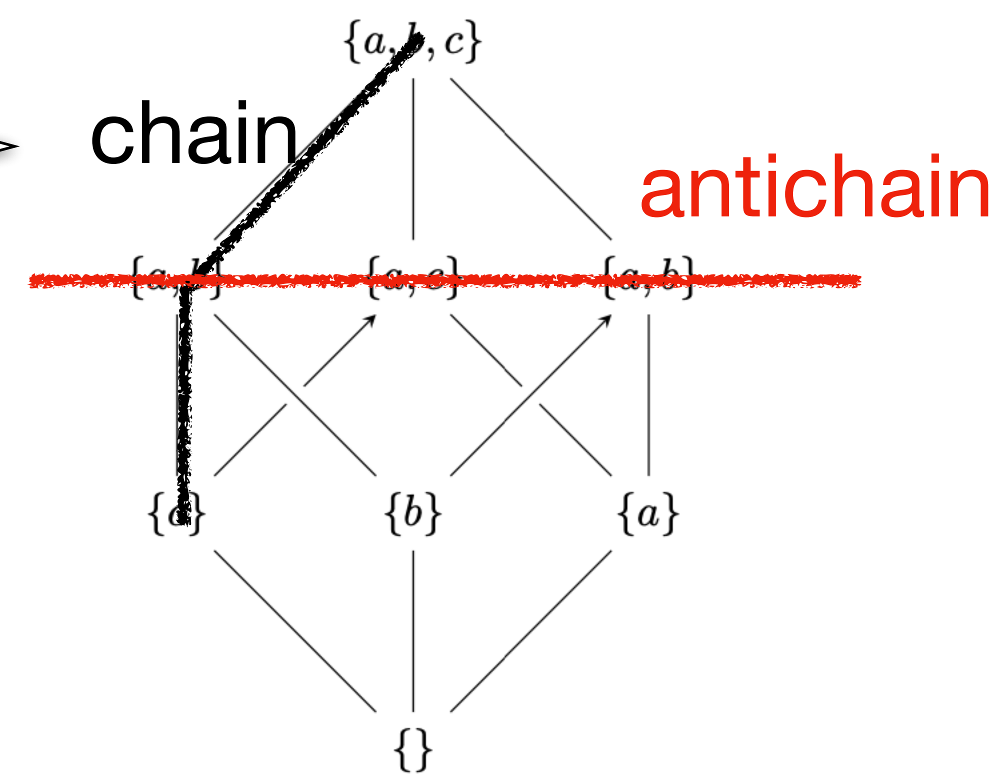


一. 偏序关系

7. 偏序集元素的可比性: (1) 定义: a, b要么$a > b$, 要么$b > a$.

定义 3.8.10 (链). 设 B 是偏序集 $(A, \preceq)$ 的一个子集, 假设 B 中任何两个元素均可比，则 B 构成一个链; 假设 B 中任何两个元素均不可比，则 B 构成一个反链.

所有可比元素构成的“链”之间的包含关系也构成一个偏序关系!



一. 偏序关系

7. 偏序集元素的可比性: (2) 链

定义 3.8.10 (链). 设 B 是偏序集 $(A, \preceq)$ 的一个子集, 假设 B 中任何两个元素均可比，则 B 构成一个链; 假设 B 中任何两个元素均不可比，则 B 构成一个反链.

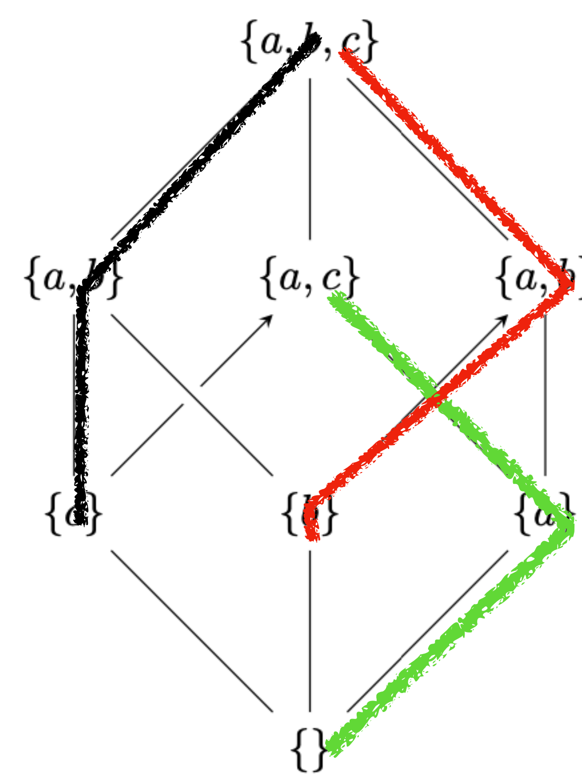
我们有时候想把它划分为若干份不相交的链的集合

问: 什么时候可以化为k个不相交的链的集合?

in any finite partially ordered set, the largest antichain has the same size as the smallest chain decomposition

Robert Palmer Dilworth

1914-1953



一. 偏序关系

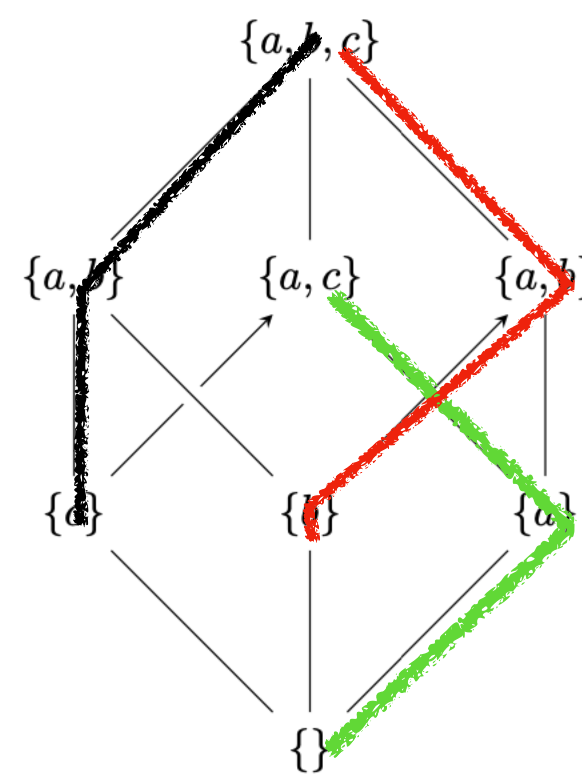
7. 偏序集元素的可比性: (2) 链

定理 3.8.3 (Dilworth's Theorem). S 是有限的偏序集, 若 S 的元素个数最多的反链含 k 个元素, 则 S 可以划分为 k 个元素互不相交的链. 也就是最大反链的大小 = 最小链分解中的链的条数.

We can prove it by induction!

Robert Palmer Dilworth

1914-1953



一. 偏序关系

7. 偏序集元素的可比性: (2) 链

定理 3.8.3 (Dilworth's Theorem). S 是有限的偏序集, 若 S 的元素个数最多的反链含 k 个元素, 则 S 可以划分为 k 个元素互不相交的链. 也就是最大反链的大小 =最小链分解中的链的条数.

We can prove it by induction!

Robert Palmer Dilworth
1914-1953

- $k=1$, 则整个 S 是一个链;
- 假设: 若偏序集中元素个数最多的反链所含的元素个数小于 k, 则 S 可划分为不超过 $k-1$ 条互不相交的链.
- 归纳: 假设 S 中有含 k 个元素的最大反链 $\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$. 开始令 $C_i = \{a_i\}$, $C = C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_k$, 若还有 a 不属于任一 C_i, 但它至少与某个 a_i 可比（否则与反链元素个数最多为 k 矛盾）. 我们试图证明 $C \cup a$ 仍可划分为 k 个链.(重组诸 C_i). 由于 S 是有限的，反复上述过程，即可证明所需结论.

一. 偏序关系

和我的交集: 当时看有人说Diliworth’s 定理, 十分的害怕...

某知名问题: 导弹拦截

stOtue 更新时间：2022-08-10 22:08:22 在 Ta 的博客查看

显然，第一问求的是最长不上升子序列。

于是接下来直接抛开第一问不谈，也不考虑优化，直接考虑第二问。待会就知道原因了。

引理：Dilworth 定理

> 狄尔沃斯定理亦称偏序集分解定理，该定理断言：对于任意有限偏序集，其最大反链中元素的数目必等于最小链划分中链的数目。此定理的对偶形式亦真，它断言：对于任意有限偏序集，其最长链中元素的数目必等于其最小反链划分中反链的数目。

该定理在该问题上可以理解成：把序列分成不上升子序列的最少个数，等于序列的最长上升子序列长度。把序列分成不降子序列的最少个数，等于序列的最长下降子序列长度。

则第二问等价于最长上升子序列。

这样写题解是很不利于他人明白的.
但是算法竞赛生的题解更多情形下是给自己看的.
这样你就能明白为什么智力选拔工具无法替代系统的教育了.

当时幼小的心灵受到了很大的震撼, 觉得他们好神...

事实上只是打开方式不对

一’. 严格偏序关系和全序关系

1. 严格偏序关系

定义 3.8.11 (严格偏序关系)**.** 令 $\prec \subseteq X \times X$ 是 X 上的二元关系, 如果满足 $\prec$ 满足下列条件, 我们说 $\prec$ 是 X 上的偏序关系.

(1) $\prec$ 是反自反 (irreflexive) 的: $\forall x.\neg(x \prec x)$;

(2) $\prec$ 是非对称 (asymmetric) 的: $\forall x, y \in X. x \prec y \to \neg(y \to x)$;

(3) $\prec$ 是传递 (transitive) 的: $\forall x, y, z \in X. x \prec y \wedge y \prec z \to x \prec z$.

第二条可以用1, 3推得, 不过为了方便理解, 先写上来了.

2. 全序关系

定义 3.8.12. 设 R 是非空集合 A 上的关系, 如果 A 是

(1) 自反的 $(\forall x \in X, x \preceq x)$;

(2) 对称的 $(\forall x, y \in X, x \preceq y \wedge y \preceq x \to x = y)$;

(3) 传递的 $(\forall x, y, z \in X. x \preceq y \wedge y \preceq z \to x \preceq z)$,

(4) 连接性 (connex): $\forall x, y \in X. x \preceq y \wedge y \preceq x$.

有时候叫线序关系

任意两个元素都是可比的

二. 函数关系

回忆: 关系 vs 函数

↓

都画在了一个平面直角坐标系里!

为什么?

但函数: 不允许 “一对多”

函数的普遍性: 加法 → add(a,b)

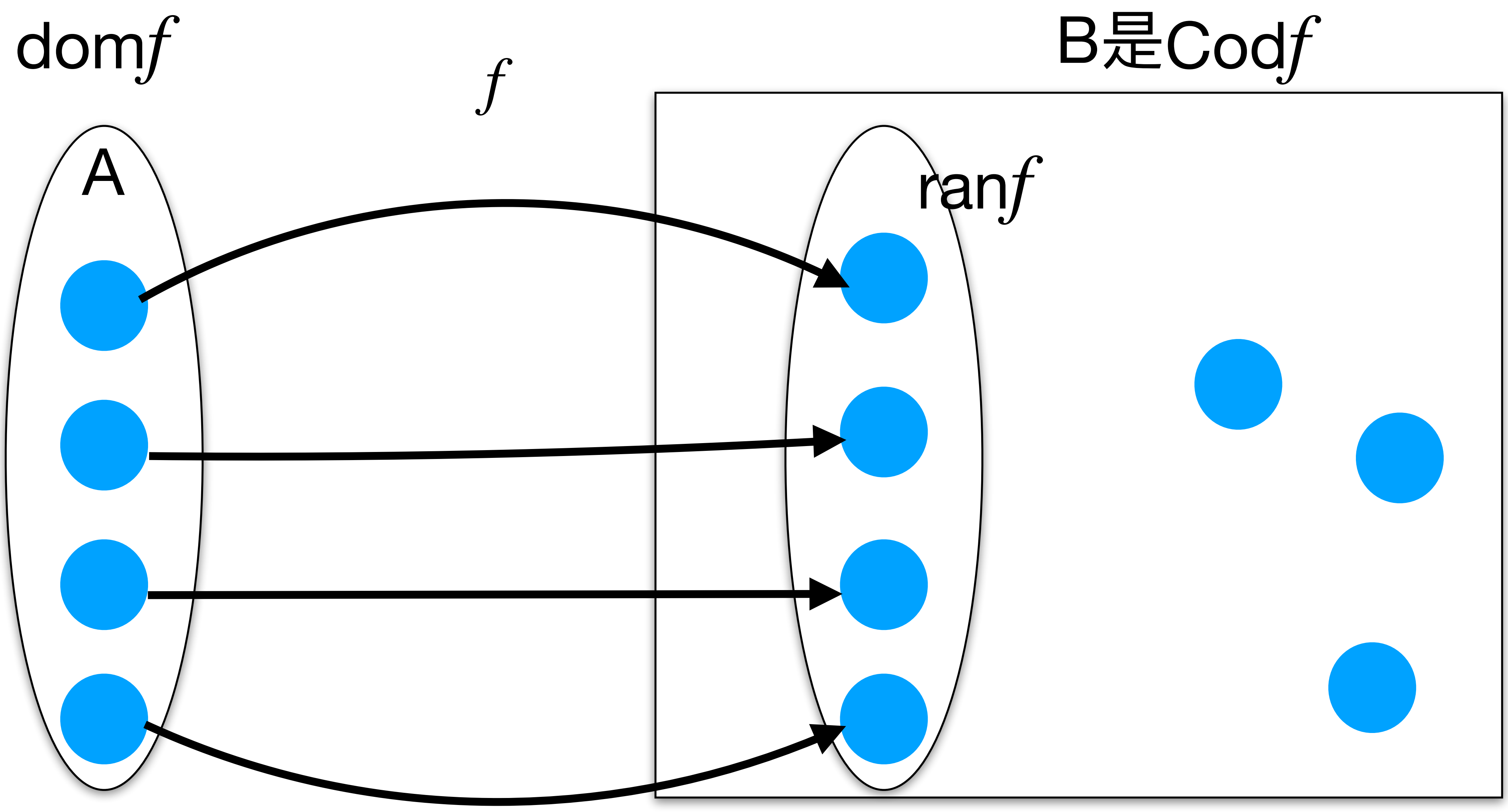
算子

二. 函数关系

1. 函数: 定义域/值域/陪域

定义 3.7.1 (Function). $f \subseteq A \times B$ is a *function* from A to B if

$$\forall a \in A.\ \exists!\ b \in B.\ (a, b) \in f.$$



二. 函数关系

1. 函数: 定义域/值域/陪域

定义 3.7.1 (Function). $f \subseteq A \times B$ is a *function* from A to B if

$(a, b) \in f$.

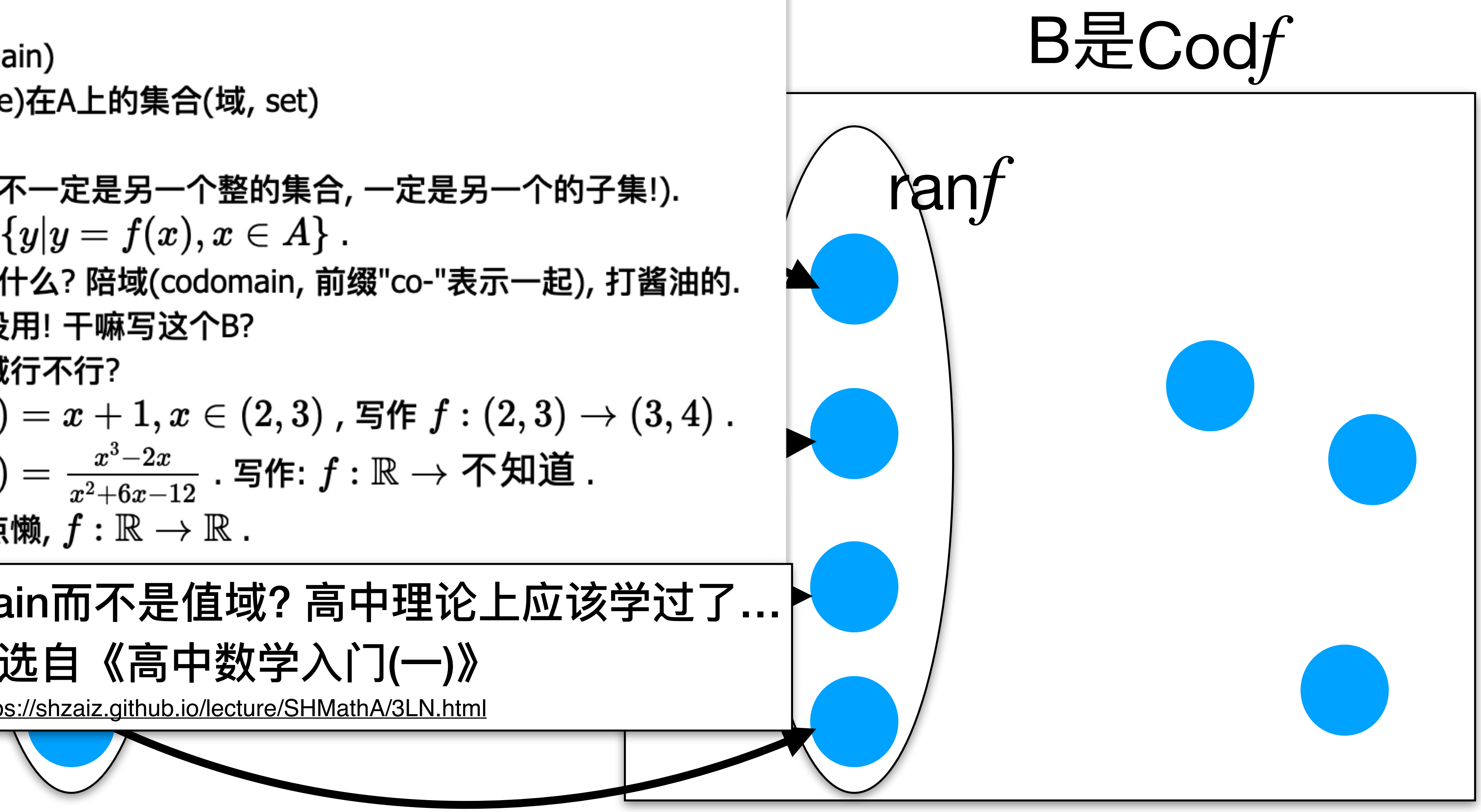
3.2 函数三要素

- A : 定义域(domain)
  - 定义(define)在A上的集合(域, set)
- f : 对应法则
- 值的集合: 值域(不一定是另一个整的集合, 一定是另一个的子集!).
  - 一种写法: $\{y|y = f(x), x \in A\}$.
  - 那B到底是什么? 陪域(codomain, 前缀"co-"表示一起), 打酱油的.
  - 看上去好没用! 干嘛写这个B?
  - 直接写值域行不行?
  - 理想: $f(x) = x + 1, x \in (2, 3)$, 写作 $f : (2, 3) \to (3, 4)$.
  - 现实: $f(x) = \frac{x^3-2x}{x^2+6x-12}$. 写作: $f : \mathbb{R} \to$ 不知道 .
  - 还是先偷点懒, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

为什么是Codomain而不是值域? 高中理论上应该学过了...

节选自《高中数学入门(一)》

https://shzaiz.github.io/lecture/SHMathA/3LN.html

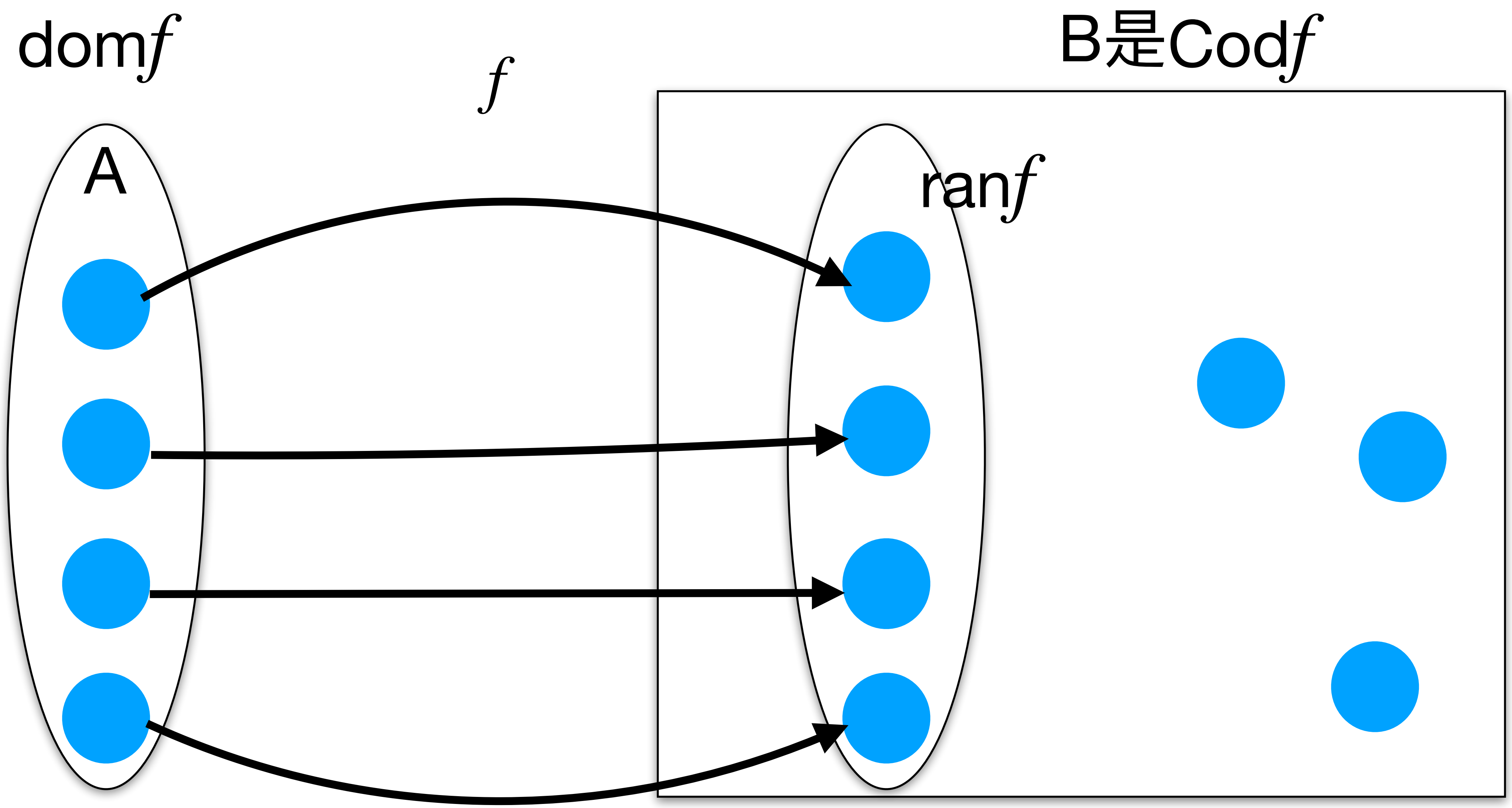


二. 函数关系

1. 函数: 定义域/值域/陪域

便于证明的语言:

$\color{red}{\forall a \in A\,.}\,, \forall a \in A\,.\,\exists b \in B\,.\,(a,b) \in f,\ \color{red}{\exists! b\ \in B\,.}\,, \forall b, b' \in B\,.\,(a,b) \in f \wedge (a,b') \in f \implies b = b'.$



二. 函数关系

2. 一些有趣的例子

① 恒等函数 id (stands for identity)

- 恒等的意思是作用以后还是自己
  - 如加法中的+0, 任意a, a+0=a;
  - 如乘法中的*1, 任意a, a*1=a;

Def1. 恒等映射I_x:

$$\forall x \in X \,.\, I_X(x) = x \,.$$

二. 函数关系

2. 一些有趣的例子

有没有处处连续, 处处不可导的函数? (Weierstrass)

Fun fact 趣事

Weierstrass 构造了一个处处连续, 处处不可导的函数.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x),$$

其中, $0 < a < 1$, b is a positive odd integer, $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$.

二. 函数关系

2. 一些有趣的例子

② 集合上的所有的函数关系

定义 3.7.2 (Y^X). The *set* of all functions from X to Y:

$$Y^X = \{f \mid f : X \to Y\}$$

举一些例子, $|X| = x, |Y| = y, |Y^X| = x^y$.

Example 举例:

- $\forall Y.\ Y^{\emptyset} = \{\emptyset\}$
- $\emptyset^{\emptyset} = \{\emptyset\}$
- $\forall X \neq \emptyset.\ \emptyset^X = \emptyset$
- $2^X = \{0, 1\}^X \cong \mathcal{P}(X)$

相当于做出了排列

二. 函数关系

2. 一些有趣的例子

③ 不存在包含所有函数的函数

定理 3.7.1. There is no set consisting of all functions.

证明. Suppose by contradiction that A is the set of all functions. For every set X, there exists a function $I_{\{X\}} : \{X\} \to \{X\}$.

$$\bigcup_{I_X \in A} \mathrm{dom}(I_X) \text{ would be the universe that does not exist!}$$

□

$\boxed{\text{怎么有和Russell悖论一样的东西啊...}}$

二. 函数关系

3. 集合视角下的函数关系

(1) 外延性原理 — 两个函数的相等

定理 3.7.2 (函数的外延性原理 (The Principle of Functional Extensionality)). f, g are functions:

$$f = g \iff \mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g) \wedge \big(\forall x \in \mathrm{dom}(f).\ f(x) = g(x)\big)$$

(2) 交与并

定理 3.7.3 (Intersection of Functions).

$$A = \{x \mid x \in A \cap C \wedge f(x) = g(x)\}$$

$$f \cap g = \{(x, y) \mid x \in A, y = f(x) = g(x)\}$$

定理 3.7.4 (Union of Functions).

$$f \cup g : (A \cup C) \to (B \cup D) \iff \forall x \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g).\ f(x) = g(x)$$

二. 函数关系

3. 集合视角下的函数关系

举个例子: 如果我们有

$$f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x+1, & x\in 2\mathbb{Z}\\ x-1, & x\in 3\mathbb{Z}\\ 2, & \text{otherwise}\end{cases}$$

$\cup\mathbb{N}\neq\emptyset$

$$g:\text{Pset}(\mathbb{R})\to\mathbb{Z}$$

定义$g(A)=\begin{cases}\min(A\cap\mathbb{N}), & \text{if} A\cup\mathbb{N}\neq\varnothing.\\ -1, & \text{if} A\cup\mathbb{N}=\varnothing.\end{cases}$

那么$f\cap g=\varnothing$. (良序原理)

二. 函数关系

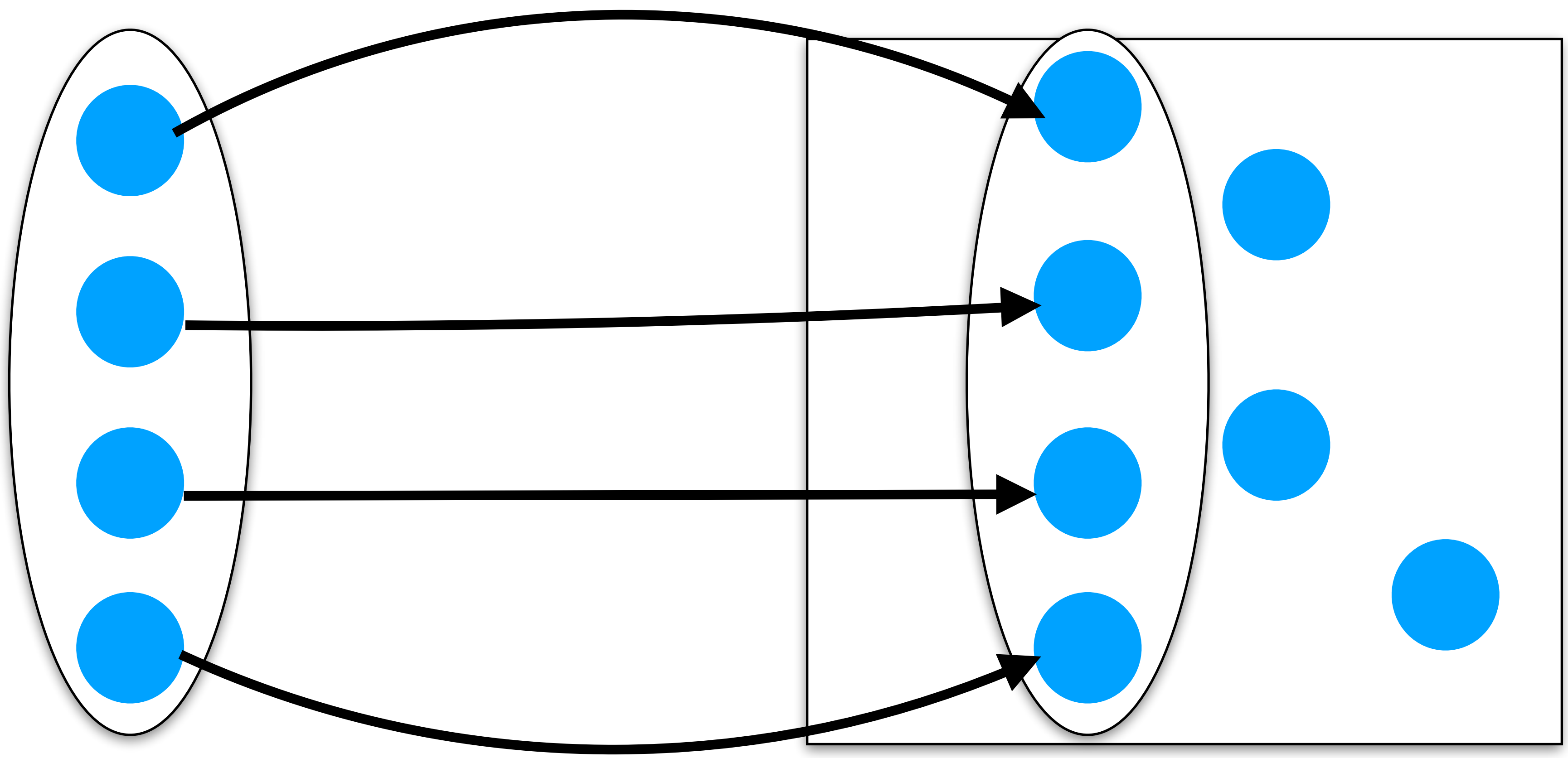
4. 特殊函数关系(-jectivity)

(1) 单射, 满射, 双射

定义 3.7.3 (Injective (one-to-one; 1-1) 单射函数).

$$f : A \to B \qquad f : A \rightarrowtail B$$

$$\forall a_1, a_2 \in A.\ a_1 \neq a_2 \to f(a_1) \neq f(a_2)$$



二. 函数关系

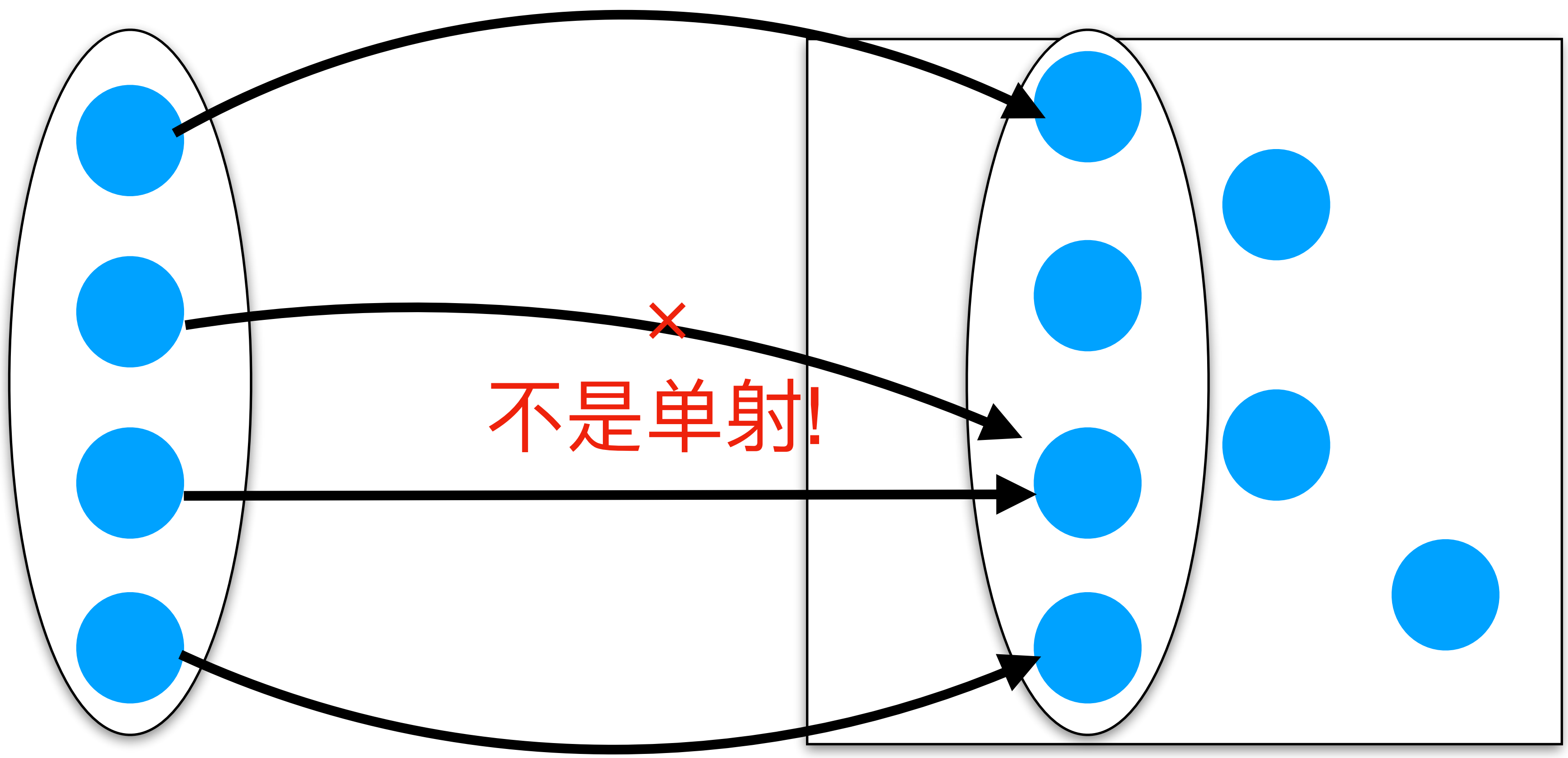
4. 特殊函数关系(-jectivity)

(1) 单射, 满射, 双射

定义 3.7.3 (Injective (one-to-one; 1-1) 单射函数).

$$f : A \to B \qquad f : A \rightarrowtail B$$

$$\forall a_1, a_2 \in A.\ a_1 \neq a_2 \to f(a_1) \neq f(a_2)$$



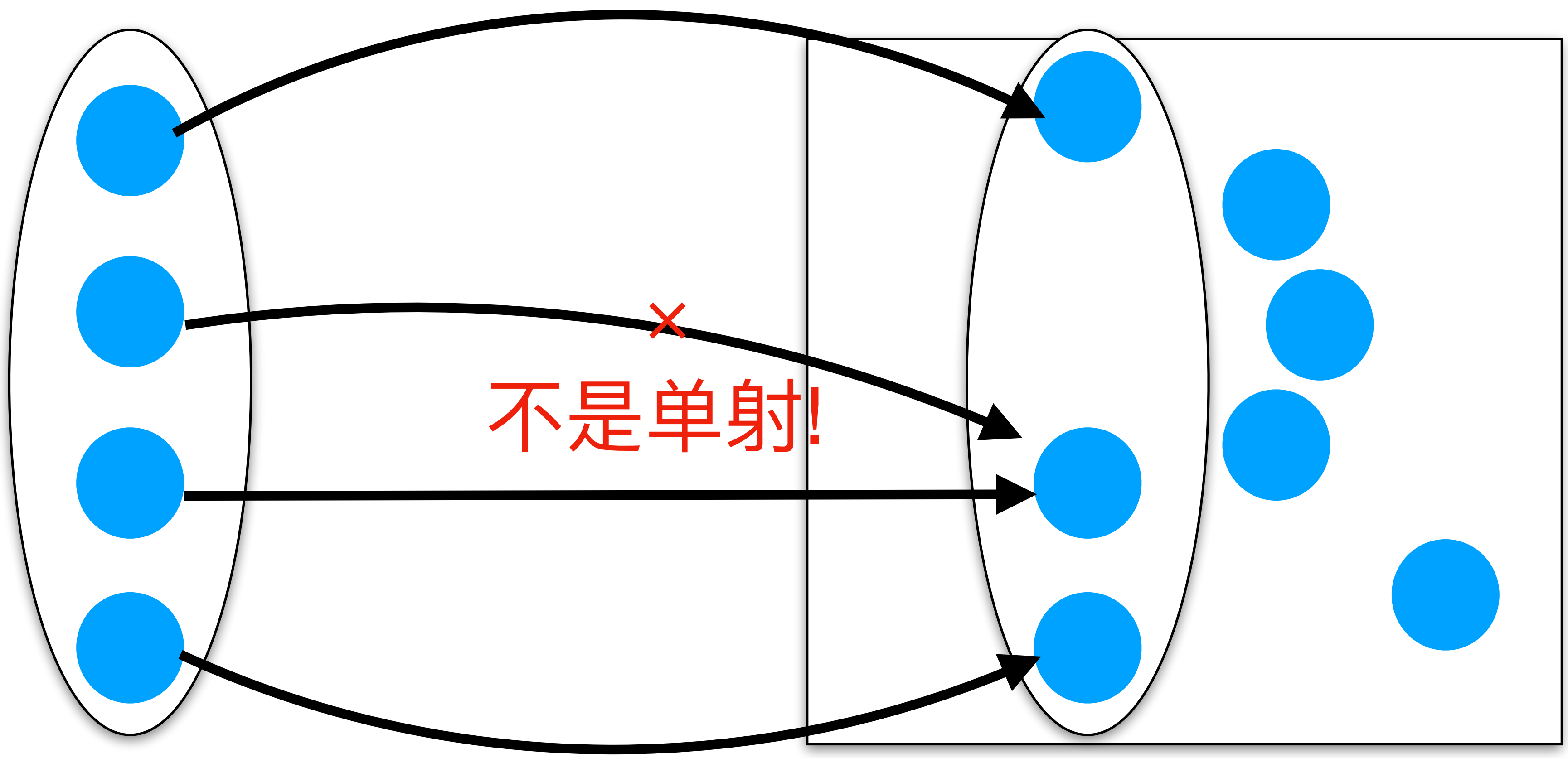
二. 函数关系

4. 特殊函数关系(-jectivity)

(1) 单射, 满射, 双射

用于证明: $\forall a_1, a_2 \in A \,.\, f(a_1) = f(a_2) \rightarrow a_1 = a_2$

用于证明不是: $\exists a_1, a_2 \in A \,.\, a_1 \neq a_2 \wedge f(a_1) = f(a_2)$



二. 函数关系

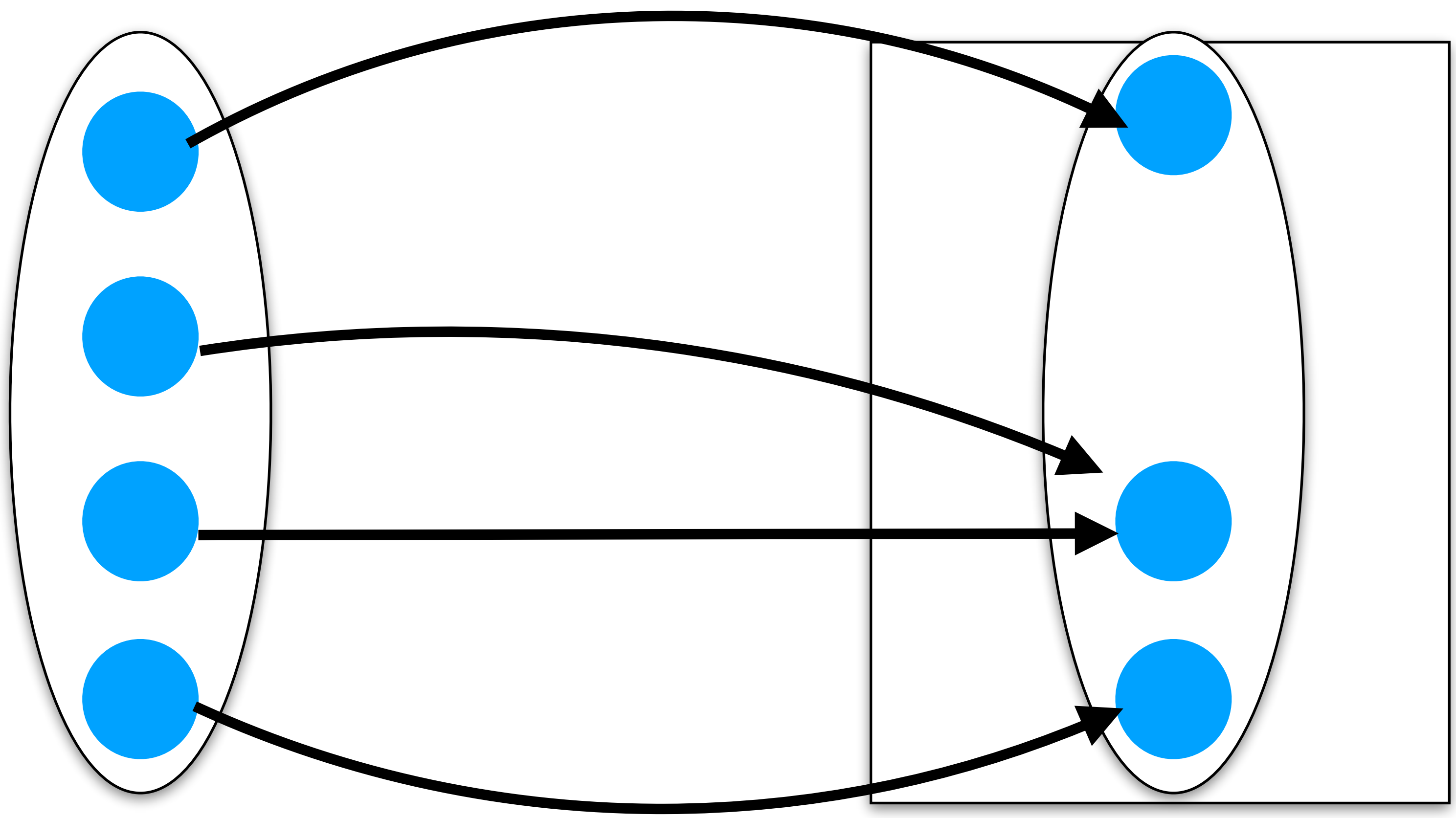
4. 特殊函数关系(-jectivity)

(1) 单射, 满射, 双射

定义 3.7.4 (Surjective (onto) 满射函数).

$$f : A \to B \qquad f : A \twoheadrightarrow B$$

$$\mathrm{ran}(f) = B$$



二. 函数关系

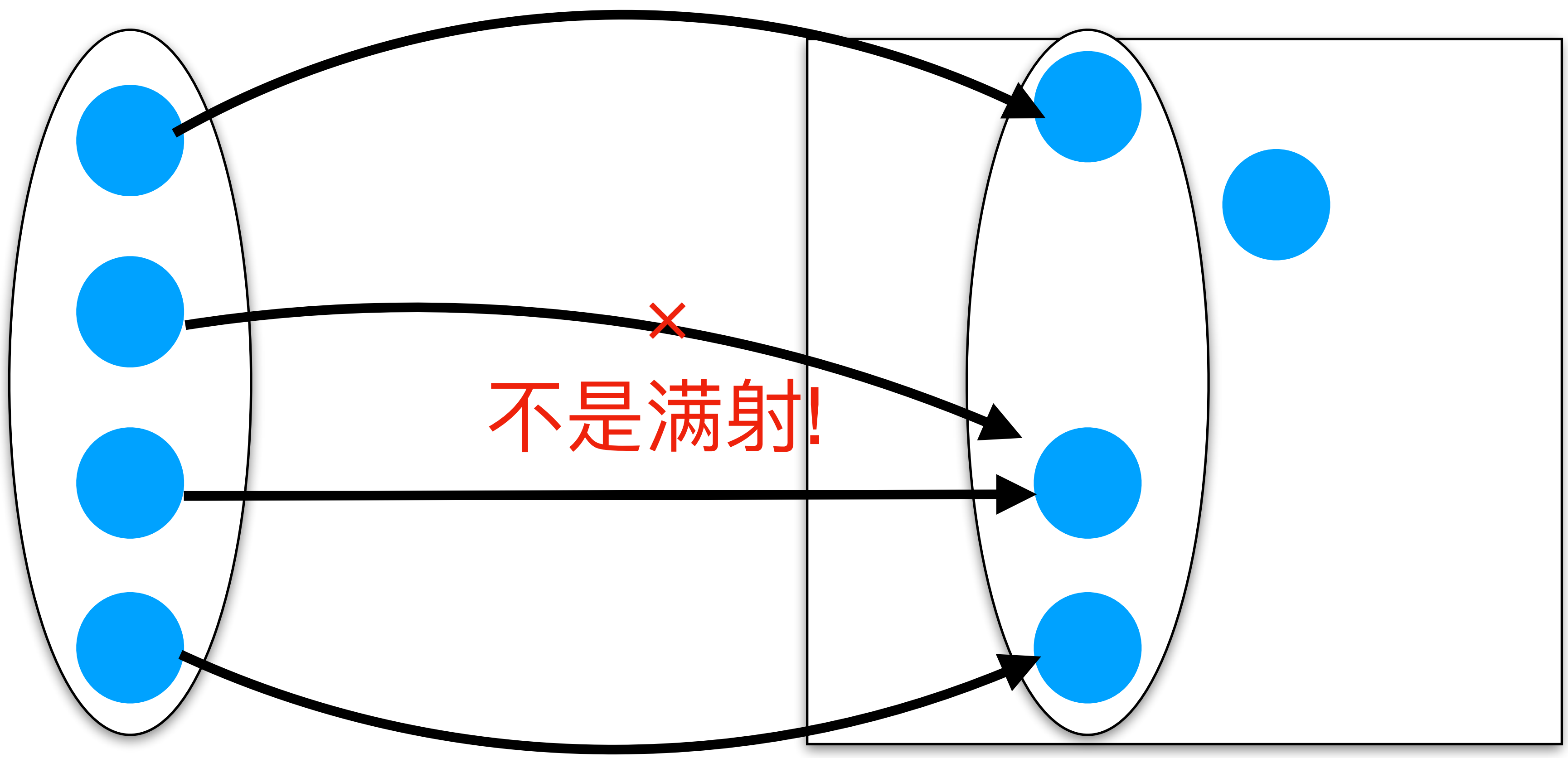
4. 特殊函数关系(-jectivity)

(1) 单射, 满射, 双射

定义 3.7.4 (Surjective (onto) 满射函数).

$$f : A \to B \qquad f : A \twoheadrightarrow B$$

$$\mathrm{ran}(f) = B$$



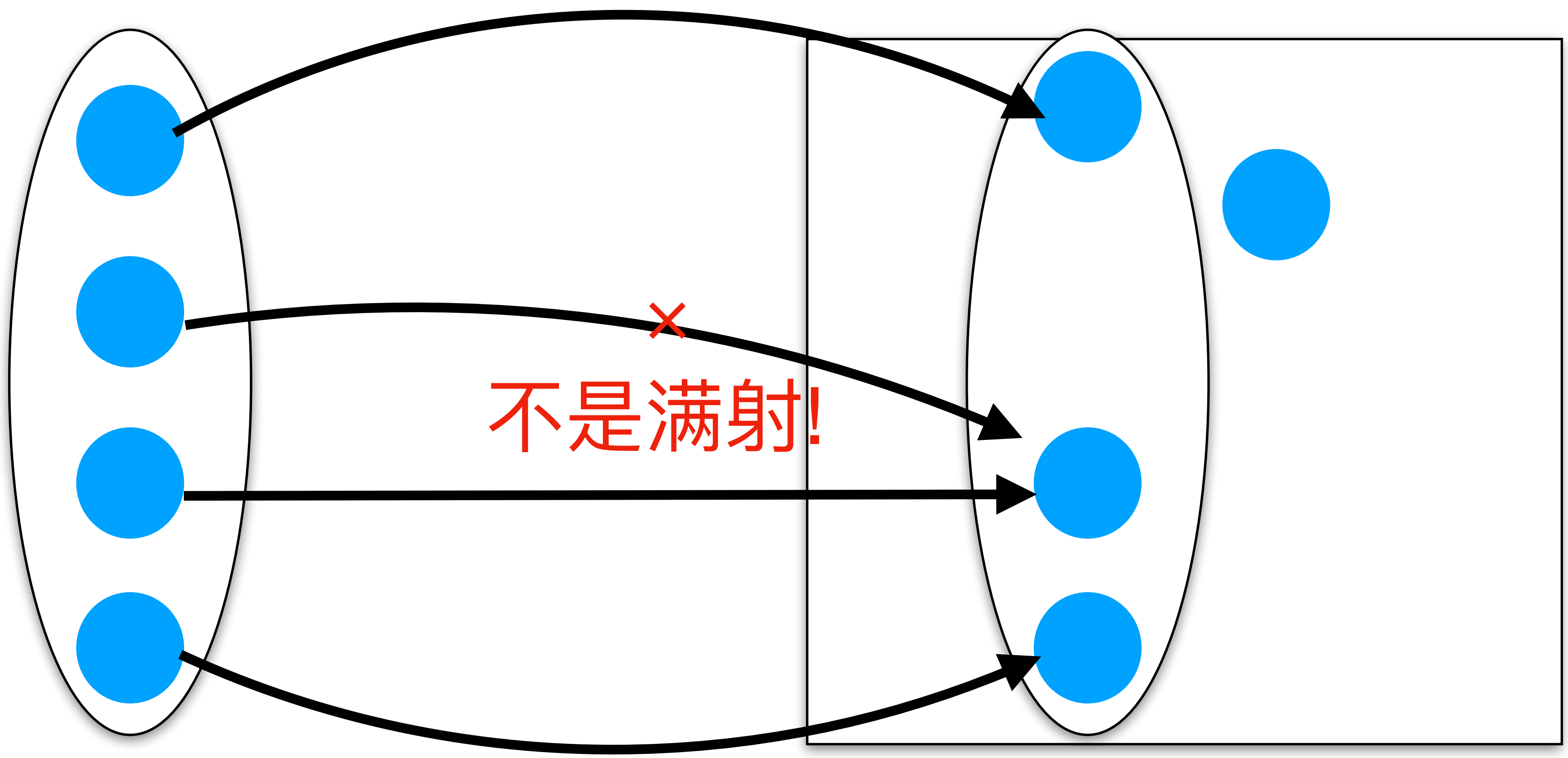
二. 函数关系

4. 特殊函数关系(-jectivity)

(1) 单射, 满射, 双射

证明是满射: $\forall b \in B\,.\, \big(\exists a \in A\,.\, f(a) = b\big)$

证明不是满射: $\exists b \in B\,.\, \big(\forall a \in A\,.\, f(a) \neq b\big)$



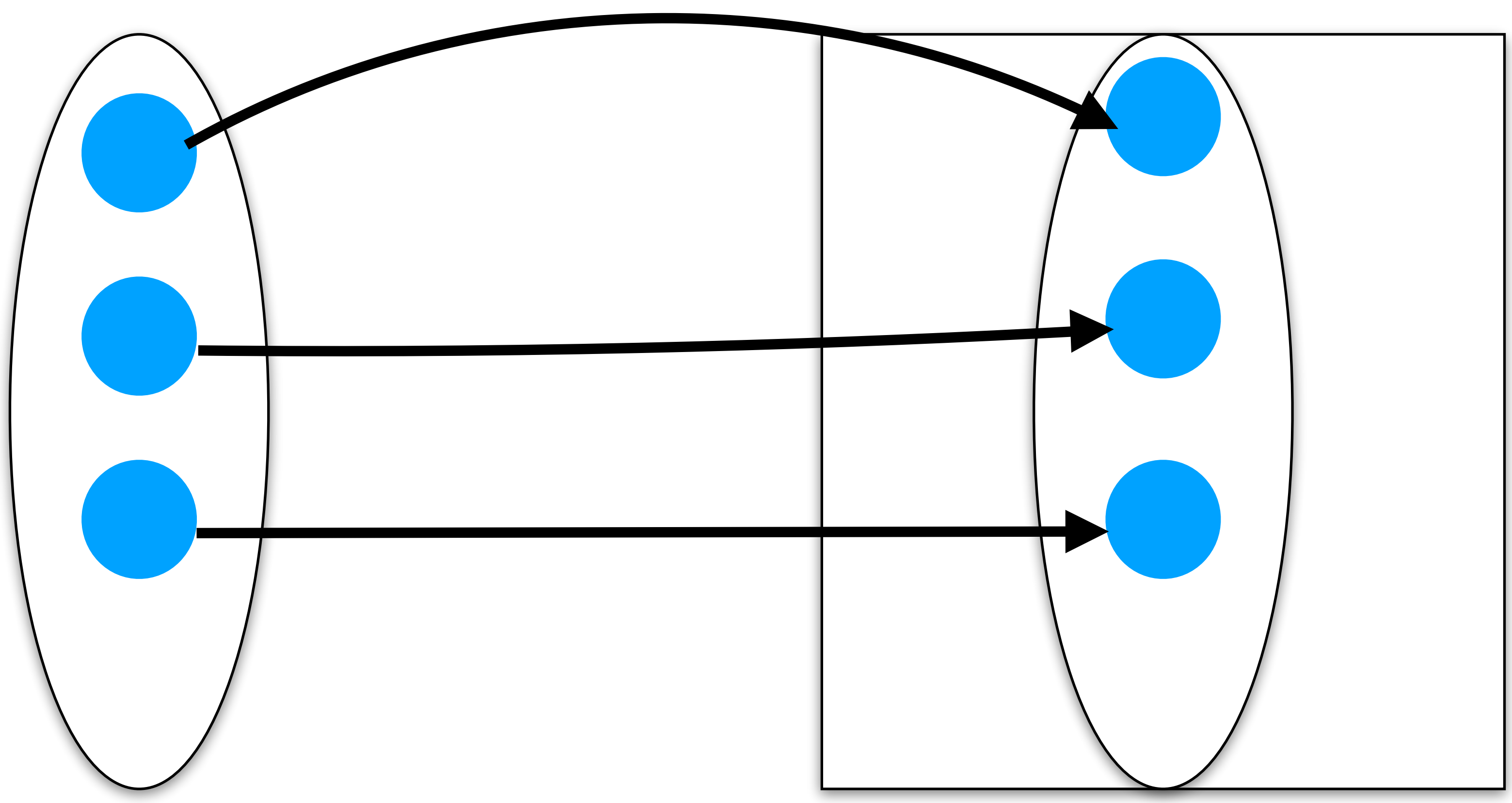
二. 函数关系

4. 特殊函数关系(-jectivity)

(1) 单射, 满射, 双射

定义 3.7.5 (Bijective (one-to-one correspondence) 双射; 一一对应).

$$f : A \to B \qquad f : A \xleftrightarrow[onto]{1-1} B$$



二. 函数关系

4. 特殊函数关系(-jectivity)

(2) Cantor's 定理: 一个集合和它的Pset之间不存在满射

定理 3.7.5 (Cantor Theorem). If $f : A \to 2^A$, then f is not onto.

一个耳熟能详的证明是使用对角线法则

但是只能处理可数个元素的时候

a	$f(a)$					
	1	2	3	4	5	$\cdots$
1	1	1	0	0	1	$\cdots$
2	0	0	0	0	0	$\cdots$
3	1	0	0	1	0	$\cdots$
4	1	1	1	0	1	$\cdots$
5	0	1	0	1	0	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$

二. 函数关系

4. 特殊函数关系(-jectivity)

(2) Cantor's 定理: 一个集合和它的Pset之间不存在满射

定理 3.7.5 (Cantor Theorem). If $f : A \to 2^A$, then f is not onto.

证明. Let A be the set and let $f : A \to 2^A$. To show that f is not onto, we must find $B \in 2^A (i.e. B \subseteq A)$ for which there is no $a \in A$ with no $f(a) = B$. In other words, B is a set that f "misses". To this end, let

$$B = x \in A | x \notin f(x)$$

We claim there is no $a \in A$ with $f(a) = B$. Suppose, for the sake of contradiction, there is an $a \in A$ such that $f(a) = B$, we pounder: Is $a \in B$?

- if $a \in B$, then, since $B = f(a)$, we have $a \in f(a)$. So by the definition of B , $a \notin f(a)$. that is $a \notin B$. Contradiction!
- If $a \notin B = f(a)$, then by the definition of B, $a \in B$. Contradiction!

To sum up, it can't be onto. □

二. 函数关系

5. 作为关系的函数

这部分和关系那点的内容重合太多了
请自行查阅讲义或补充资料.

参考文章和课件

1. 魏恒峰《离散数学2020》集合论II. 关系
2. 南京大学《计算机问题求解2021》集合论II. 关系

Thank You!

Your opinon Matters

QQ: 2095728218
Email: micoael@qq.com
(学校) gwzhang@cug.edu.cn